

Prova I (2a. chamada)- Cálculo IV -MTM5118- 01/2014

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Justifique sua resposta de forma precisa, respostas sem justificativa e/ou cálculos não serão aceitas.**

1. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

2. Classifique cada série abaixo em divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$

3. Encontre todos os $p \geq 0$ tais que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)][\ln(\ln(n))]^p}$ seja convergente.

4. Aproxime a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{8^n}$ com precisão de 10^{-4} .

5. Determine o limite da sequência de funções $\{(1-x^2)^n\}_{n=1}^{\infty}$ em $[-1, 1]$. Verifique se a convergência é uniforme ou não, justificando de forma rigorosa sua resposta.

Resolução 2ª chamada P1- Cálculo IV
MTM 5118- 2014.01

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \cdot \pi \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right]$$

$$= \pi \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} \right] \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \right]$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}, \text{ pois}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)} = \cos(0) = 1$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} (n+1)!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n+2)(3n+5)} \cdot \frac{(-1)^n 2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n+2)} \right|$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)!}{(3n+5)n!} \cdot \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)}{3n+5} = \frac{2}{3} < 1$$

A série converge absolutamente

b) Sendo $b_n = \frac{n^2}{n^3+4}$, temos $b_n > 0$ para

todo $n \in \mathbb{N}$. Definindo $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

por

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+4}, \text{ temos}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3+4) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+4)^2} = \frac{-x^4+8x}{(x^3+4)^2} = \frac{x[-x^3+8]}{(x^3+4)^2}$$

Se $x > 2$, $x^3 > 8$ e $-x^3+8 < 0$, logo $f'(x) < 0$.
Assim f é decrescente em $[3, +\infty)$.

$$\text{Também, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{4}{n^3}} \right) \\ = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{n^3}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Pelo Teste de Leibniz a série converge.
Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^3+4} = 1 \quad \text{e}$$

pelo teste da comparação por limites, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+4}$ diverge.

Pontanto, a série dada converge
condicionalmente.

3) Como $f(x) = \frac{1}{x \ln(x) [\ln(\ln(x))]^p}$ é positiva e decrescente para $x \geq 2$ e $p \geq 0$

podemos usar o teste da integral.

$$\text{Se } p=0, \quad \int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))]$$

$$= +\infty$$

A série diverge se $p=0$.

Se $p > 0$, $p \neq 1$,

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln(x)} [\ln(\ln(x))]^{-p} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(\ln(x))]^{-p+1} \Big|_2^t, \text{ pois } [\ln(\ln(x))]^{-p+1}' = \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ [\ln(\ln(t))]^{-p+1} - [\ln(\ln(2))]^{-p+1} \right\}$$

$$= \begin{cases} -[\ln(\ln(2))]^{-p+1} & \text{se } p > 1 \\ +\infty & \text{se } p < 1 \end{cases}$$

$$\text{Se } p=1, \quad \int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{ \ln[\ln(\ln(t))] - \ln(\ln(\ln(2))) \}$$

$$= +\infty$$

Assim a série converge se $p > 1$ e diverge se $0 \leq p \leq 1$.

4) Sendo $f(x) = \frac{x}{8^x}$, $f'(x) = \frac{8^x - x \cdot 8^x \ln 8}{(8^x)^2}$

$$= \frac{8^x [1 - x \cdot \ln 8]}{(8^x)^2} < 0$$

para todo $x > 0$.

Também $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{8^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8^x \ln 8} = 0$

Logo a série satisfaz as hipóteses do teste de Leibniz e podemos escrever

$$|S_m - S| \leq \frac{b}{8^{m+1}} \Rightarrow |S_m - S| \leq \frac{m+1}{8^{m+1}} < 10^{-4}$$

Isso ocorre quando $m=5$, logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{8^n} \approx \sum_{k=1}^5 (-1)^k \frac{k}{8^k} \text{ com precisão de } 10^{-4}.$$

5) Se $|x| = 1$, $1 - x^2 = 0$ e $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - x^2)^m = 0$. Se $-1 < x < 1$, $x \neq 0$, temos $0 < x^2 < 1$ e $0 < 1 - x^2 < 1$ e

assim $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - x^2)^m = 0$. Se $x = 0$, $1 - x^2 = 1$

e $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - x^2)^m = 1$. Portanto $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1 - x^2)^m = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

para x satisfazendo $|x| \leq 1$.

Como o limite de $\{(1 - x^2)^m\}_{m=1}^{+\infty}$ é uma função descontínua em $[-1, 1]$, $f_m(x) = (1 - x^2)^m$ é contínua, logo a convergência não é uniforme.