



Disciplina: MTM 5164-Cálculo D
Professor: Luciano Bedin

Prova 1 - 16/09/2015

Nome: _____ Matrícula: _____

Instruções:

Nota: _____

- 1) Não serão aceitas respostas sem justificativa e/ou cálculos;
- 2) Não é permitido o uso de calculadoras, celulares e afins.

Questões:

1. Classifique cada sequência abaixo em convergente ou divergente. Em caso de convergência, determine o limite.

1,5 a. $\left\{ \frac{(-1)^n e^n}{1+e^n} \right\}_{n=1}^{+\infty}$
1,0 b. $\left\{ n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{+\infty}$

2. Encontre os valores de $p > 0$ tais que a série

2,0
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^p}$$

é convergente.

3. Verifique se cada série abaixo converge ou diverge.

1,0 a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 1,0 b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n/3}}$

- 4,5 4. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $(z - 5 + 3i)^4 = 1$ e represente graficamente as soluções.

- 2,0 5. Considere os seguintes pontos do plano: $A(1, 2)$ e $B(4, -1)$. Usando números complexos, encontre dois pontos C e D do plano de forma que o quadrilátero $ABCD$ seja um quadrado.

Prova I - Cálculo D - 2015/02

1) a) Considere as subsequências $\left\{ \frac{(-1)^{2K} e^{2K}}{1 + e^{2K}} \right\}_{K=1}^{+\infty}$
e $\left\{ \frac{(-1)^{2K+1} e^{2K+1}}{1 + e^{2K+1}} \right\}_{K=1}^{+\infty}$. Usando L'Hopital temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{1 + e^{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x+1}}{2e^{2x+1}} = 1.$$

Pontanto, como $(-1)^{2K} = 1$ e $(-1)^{2K+1} = -1$, a primeira subsequência converge a 1 e a segunda para -1. Logo a sequência é divergente.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$

logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

2) Seja $f(x) = \frac{1}{x [\ln(x)]^p}$, $x \geq 2$. Então:

i) f é contínua;

ii) f é positiva;

iii) Como $p > 0$, $[\ln(x+1)]^p > [\ln(x)]^p$, para todo $x \geq 2$.

Logo,

$$(x+1) \cdot [\ln(x+1)]^p > (x+1) [\ln(x)]^p > x \cdot [\ln(x)]^p \text{ e } f$$

é decrescente em $[2, +\infty[$.

Teste da integral: Se $p \neq 1$, $p > 0$,

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x [\ln(x)]^p} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x [\ln(x)]^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x} \cdot [\ln(x)]^{-p} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{[\ln(x)]^{-p+1}}{-p+1} \right|_2^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \left[[\ln(t)]^{1-p} - [\ln(2)]^{1-p} \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{(\ln(2))^{1-p}}{1-p} & \text{se } p > 1 \\ +\infty & \text{se } p < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Para o caso $p=1$, temos $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \ln(\ln(x)) \right|_2^t = +\infty$

A série converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

3) a) $2 + (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Então $0 < 2 + (-1)^n \leq 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$0 < \frac{2 + (-1)^n}{n \sqrt{n}} \leq \frac{3}{n^{3/2}}, \text{ como } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge (p-série com } p > 1)$$

pelos teste da comparação, a série é convergente.

$$3) b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n/3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt[3]{51}]^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt[3]{51})^{n-1} \cdot \sqrt[3]{51}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{51}} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{51}}, \text{ que é uma série geométrica}$$

com $a = \frac{1}{\sqrt[3]{51}}$ e $r = \frac{-1}{\sqrt[3]{51}}$, como $|r| < 1$, a série é convergente.

$$4) (z - 5 + 3i)^4 = 1 \Leftrightarrow z - 5 + 3i = 1^{1/4}$$

Do seja, $z_K - 5 + 3i = e^{\frac{0 + 2K\pi i}{4}}$, $K = 0, 1, 2, 3$.

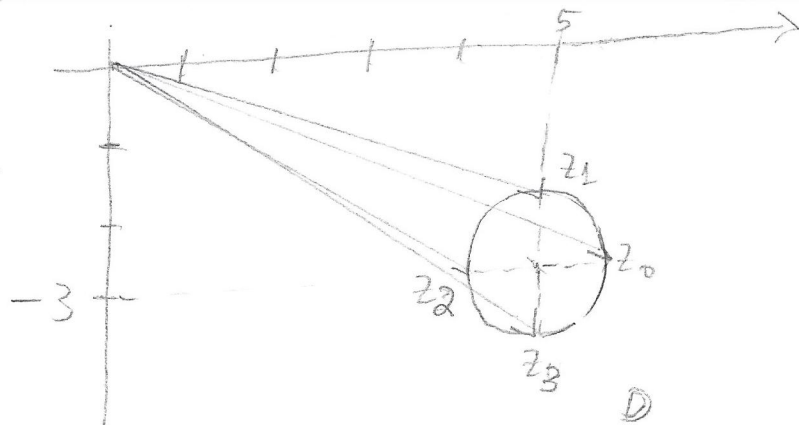
$$z_K = e^{\frac{K\pi i}{2}} + 5 - 3i, \quad K = 0, 1, 2, 3.$$

$$K=0, \quad z_0 = 1 + 5 - 3i = 6 - 3i$$

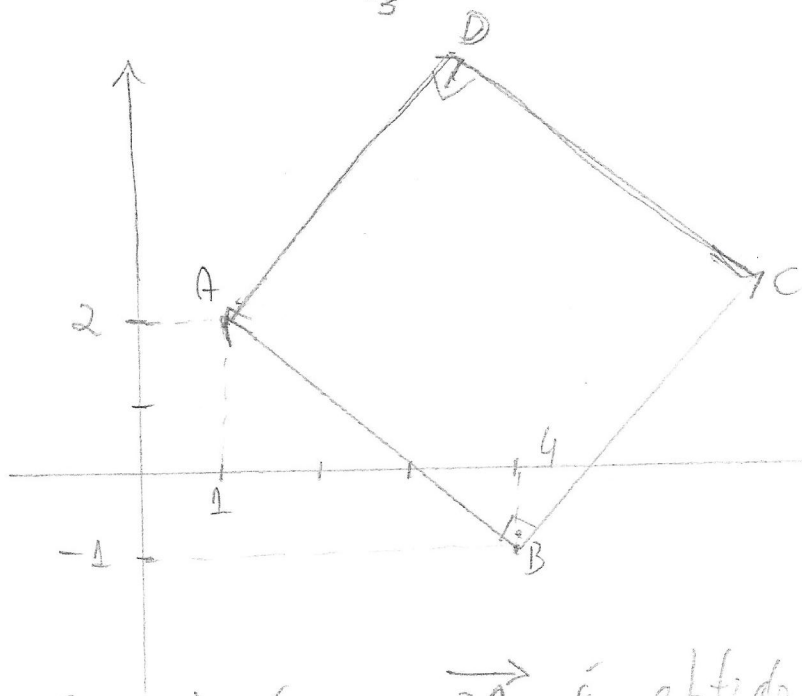
$$K=1, \quad z_1 = e^{\frac{\pi i}{2}} + 5 - 3i = i + 5 - 3i = 5 - 2i$$

$$K=2, \quad z_2 = e^{\pi i} + 5 - 3i = -1 + 5 - 3i = 4 - 3i$$

$$K=3, \quad z_3 = e^{\frac{3\pi i}{2}} + 5 - 3i = -i + 5 - 3i = 5 - 4i$$



5)



Seja $C(x_1, y_1)$. Como $\overrightarrow{BA}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{BC}$ através de uma rotação de $\pi/2$, temos

$$(1-4) + (2-(-1))i = e^{i \cdot \pi/2} \cdot [(x_1-4) + i \cdot (y_1-(-1))]]$$

$$-3 + 3i = i(x_1-4) - (y_1+1) \Rightarrow \begin{cases} x_1-4=3 \Rightarrow x_1=7 \\ -(y_1+1)=-3 \Rightarrow y_1=2 \end{cases}$$

Logo as coordenadas de C são 7 e 2.

Seja $D(x_2, y_2)$. Como $\overrightarrow{AD}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{AB}$ através de uma rotação de $\pi/2$, obtemos:

$$-(1-x_2) - i(2-y_2) = i[(4-1) + i(-1-2)] . \text{ Logo,}$$

$$-(1-x_2)=3 \Rightarrow x_2=4$$

$$-(2-y_2)=3 \Rightarrow y_2=5$$

e D tem coordenadas 4 e 5.