



Cálculo IV- Prova 2

Nome: 

1. (3,0 pontos) As vibrações longitudinais de uma corda de comprimento 2π presa pelas extremidades e sujeita a uma força de intensidade constante e igual a F são descritas pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0,$$

com condições de contorno e iniciais dadas por

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 2\pi.$$

Encontre uma solução para esse problema, propondo uma solução da forma $u(x, t) = U(x, t) + \psi(x)$, onde ψ deve ser escolhido de forma tal que U satisfaça um problema de onda padrão homogêneo.

2. (3,0 pontos) Determine o potencial eletrostático na região compreendida entre dois círculos concêntricos de raios 1 e 2, respectivamente. Assuma que não há cargas nessa região e que a fronteira do círculo mais interno é mantido a um potencial $f(\theta) = -1$ se $0 \leq \theta < \pi$, $f(\theta) = 1$ se $\pi < \theta < 2\pi$, enquanto a fronteira do mais externo é mantido a potencial nulo. (Dica: procure por soluções 2π -periódicas, com relação à variável θ .)

3. (2,0 pontos) Determine onde $f'(z)$ existe. Para os pontos onde ela existe, determine-a:

a. $f(z) = z[Im(z) + Re(z)]$ b. $f(z) = x^3 - i(y - 2)^3$

4. (1,0 pontos) Encontre a solução de cada equação abaixo:

a. $\sinh z = 0$ b. $\cos i\bar{z} = \overline{\cos iz}$

5. (1,0 pontos) Encontre as raízes de $z^5 + 1 = 0$ e represente-as graficamente.

Equação de Laplace em coordenadas polares: $u_{rr}(r, \theta) + r^{-1}u_r(r, \theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$.

Equações de Cauchy-Riemann: $u_x(x, y) = v_y(x, y)$, $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$

Derivada da função $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$: $f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$

Resolução Prova 2: 2007

$$\textcircled{1} \quad u(x,t) = \mathcal{U}(x,t) + \gamma(x) \Rightarrow \begin{aligned} u_x(x,t) &= \mathcal{U}_x(x,t) + \gamma'(x), & u_t(x,t) &= \mathcal{U}_t(x,t) \\ u_{xx}(x,t) &= \mathcal{U}_{xx}(x,t) + \gamma''(x), & u_{tt}(x,t) &= \mathcal{U}_{tt}(x,t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_{tt}(x,t) = c^2 [\mathcal{U}_{xx}(x,t) + \gamma''(x)] + F \Rightarrow \boxed{c^2 \gamma''(x) + F = 0}$$

$$u(0,t) = \mathcal{U}(0,t) + \gamma(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 0} \quad \text{para que } u(0,t) = \mathcal{U}(0,t) = 0$$

$$u(2\pi,t) = \mathcal{U}(2\pi,t) + \gamma(2\pi) = 0$$

$$\text{Além disso } u(x,0) = \mathcal{U}(x,0) + \gamma(x) = f(x) \Rightarrow \boxed{\mathcal{U}(x,0) = f(x) - \gamma(x)}$$

$$u_t(x,0) = \mathcal{U}_t(x,0) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{U}_t(x,0) = 0}$$

$$\text{Do fato que } c^2 \gamma''(x) + F = 0, \text{ temos } \gamma''(x) = -\frac{F}{c^2} \Rightarrow \gamma'(x) = -\frac{F}{c^2} x + C_1 \Rightarrow \gamma(x) = -\frac{F}{2c^2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\gamma(0) = C_2 = 0, \quad \gamma(2\pi) = -\frac{F}{2c^2} (2\pi)^2 + 2\pi C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{F \cdot 2\pi}{2c^2} = \frac{F \cdot \pi}{c^2}$$

$$\text{Assim, } \boxed{\gamma(x) = -\frac{F}{2c^2} x^2 + \frac{F \cdot \pi}{c^2} x} \quad \text{e } \mathcal{U} \text{ satisfaz:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < 2\pi, t > 0 \\ \mathcal{U}(0,t) = \mathcal{U}(2\pi,t) = 0, & t > 0 \\ \mathcal{U}(x,0) = f(x) - \gamma(x), & 0 < x < 2\pi \\ \mathcal{U}_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Propondo } u(x,t) = X(x)T(t), \text{ temos: } \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda$$

O problema de Sturm-Liouville correspondente é:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < 2\pi \\ X(0) &= X(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Sua solução é } x_n(x) = a_n \sin\left(\frac{m}{2}x\right), \quad m=1,2,\dots, \quad \lambda_m = \frac{m^2}{4}, \quad m=1,2,\dots$$

$$\text{Resolvendo } T_m''(t) + \frac{m^2}{4} c^2 T_m(t) = 0, \text{ obtemos } T_n(t) = b_n \sin\left(\frac{m}{2}ct\right) + c_n \cos\left(\frac{m}{2}ct\right) \quad \text{e}$$

assim temos $u_m(x,t) = X_m(x) T_m(t) = \cos\left(\frac{m x}{2}\right) \left[a_m^* \cos\left(\frac{m c t}{2}\right) + b_m^* \sin\left(\frac{m c t}{2}\right) \right]$

e $u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x,t)$.

Dessa forma:

$$u(x,0) = f(x) - \gamma(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{m x}{2}\right) b_m^* \Rightarrow b_m^* = \frac{\int_0^{2\pi} [f(x) - \gamma(x)] \cos\left(\frac{m x}{2}\right) dx}{\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{m x}{2}\right) dx}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{m x}{2}\right) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(mx)}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot x \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \sin(mx) \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$b_m^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) + \frac{F x^2}{2c^2} - \frac{F \pi x}{c^2} \right] dx$$

Analogamente: $u_t(x,0) = 0 = \sum_{m=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{m x}{2}\right) \left[a_m^* \cdot \frac{m c}{2} \cos 0 - b_m^* \frac{m c}{2} \sin 0 \right]$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m c}{2} a_m^* \cos\left(\frac{m x}{2}\right) \Rightarrow \frac{m c}{2} a_m^* = 0 \Rightarrow \boxed{a_m^* = 0}$$

Solução final: $u(x,t) = u(x,t) + \gamma(x)$

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left[f(x) + \frac{F x^2}{2c^2} - \frac{F \pi x}{c^2} \right] dx \right) \cos\left(\frac{m x}{2}\right) \cos\left(\frac{m c t}{2}\right) - \frac{F x^2}{2c^2}$$

$$- \frac{F \pi x}{c^2}$$

$$(2) \quad \mu_{nn}(n, \theta) + \frac{1}{n} \mu_n(n, \theta) + \frac{1}{n^2} \mu_{\theta\theta}(n, \theta) = 0, \quad 1 < n < 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\mu(1, \theta) = 0$$

$$\mu(2, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} -1 & 0 \leq \theta < \pi \\ 1 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$\mu(n, \theta) = R(n) \Theta(\theta) \Rightarrow R''(n) \Theta(\theta) + \frac{1}{n} R'(n) \Theta(\theta) + \frac{1}{n^2} R(n) \Theta''(\theta) = 0$$

$$n^2 R''(n) \Theta(\theta) + n R'(n) \Theta(\theta) + R(n) \Theta''(\theta) = 0$$

$$-\frac{n^2 R''(n) + n R'(n)}{R(n)} = + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0, & 0 < \theta < 2\pi \\ \Theta \text{ é } 2\pi \text{ periódico} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Theta_m(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta) \\ \lambda_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2 R''(n) + n R'(n) - \lambda R(n) = 0, & 1 < n < 2 \\ R(1) = 0 \end{cases}, \quad \mu(1, \theta) = R(1) \Theta(\theta) = 0 \Rightarrow R(1) = 0$$

↓

$$\begin{cases} n^2 R_m''(n) + n R_m'(n) - m^2 R_m(n) = 0 \\ R_m(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Eq. de Euler: } \begin{aligned} R_m(n) &= n^\alpha \\ R_m'(n) &= \alpha n^{\alpha-1} \\ R_m''(n) &= \alpha(\alpha-1) n^{\alpha-2} \end{aligned}$$

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - m^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = m \\ \alpha_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{Se } m=0 \Rightarrow R_0(n) = c_0 + d_0 \ln n$$

$$\text{Se } m \neq 0 \Rightarrow R_m(n) = c_m n^m + d_m n^{-m}$$

$$\text{Como } R_0(1) = 0 \Rightarrow 0 = c_0 + d_0 \ln 1 = c_0 \Rightarrow c_0 = 0 \Rightarrow \boxed{R_0(n) = d_0 \ln n}$$

$$R_m(1) = 0 \Rightarrow 0 = c_m + d_m \Rightarrow c_m = -d_m \Rightarrow \boxed{R_m(n) = c_m [n^m - n^{-m}]}, \quad m > 0$$

Assim, $\mu_m(r, \theta) = R_m(r) \Theta_m(\theta) \rightarrow \mu_0(r, \theta) = a_0^* \ln r$

$\mu_m(r, \theta) = [a_m^* \cos(m\theta) + b_m^* \sin(m\theta)] \cdot [r^m - r^{-m}]$

$$\mu(r, \theta) = a_0^* \ln r + \sum_{m=1}^{+\infty} [r^m - r^{-m}] \cdot [a_m^* \cos(m\theta) + b_m^* \sin(m\theta)]$$

$$\mu(z, \theta) = a_0^* \ln z + \sum_{m=1}^{+\infty} [z^m - z^{-m}] [a_m^* \cos(m\theta) + b_m^* \sin(m\theta)]$$

Integrando de 0 a 2π , temos:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = a_0^* \ln z \int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{m=1}^{+\infty} [z^m - z^{-m}] \left[a_m^* \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\theta + b_m^* \int_0^{2\pi} \sin(m\theta) d\theta \right]$$

$$\int_0^{\pi} -d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} d\theta = a_0^* \ln z \cdot 2\pi + 0 \Rightarrow 0 = a_0^* \ln z \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{a_0^* = 0}$$

Multiplicando por $\cos(m\theta)$ ($m \neq 0$) e integrando de 0 a 2π temos

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} [z^n - z^{-n}] \left[a_n^* \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta + b_n^* \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \sin(n\theta) d\theta \right]$$

$$-\int_0^{\pi} \cos(m\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(m\theta) d\theta = (z^m - z^{-m}) a_m^* \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta$$

$$-\frac{1}{m} \sin(m\theta) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{m} \sin(m\theta) \Big|_{\pi}^{2\pi} = (z^m - z^{-m}) a_m^* \cdot \frac{1}{\pi} \Rightarrow \boxed{a_m^* = 0}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Multiplicando por $\sin(m\theta)$ ($m \neq 0$) e integrando de 0 a 2π temos:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} [z^n - z^{-n}] b_n^* \int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

$$-\int_0^{\pi} \sin(m\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(m\theta) d\theta = (z^m - z^{-m}) b_m^* \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta) d\theta = \frac{(z^m - z^{-m})}{\pi} \cdot b_m^*$$

Assim, $b_m^* = \frac{\pi}{(z^m - z^{-m})} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta$

$$\text{Logo, } b_m^* = \frac{\pi}{2^m - 2^{-m}} \left[\frac{1}{m} \omega_2(m\theta) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{m} \omega_2(m\theta) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right]$$

$$b_m^* = \frac{\pi}{2^m - 2^{-m}} \left[\frac{1}{m} (\omega_2(m\pi) - 1) - \frac{1}{m} (\omega_2(2m\pi) - \omega_2(m\pi)) \right]$$

Se m é par, $b_m^* = 0$

Se m é ímpar, $b_m^* = \frac{\pi}{2^m - 2^{-m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot (-4) \Rightarrow b_{2m-1} = \frac{-4\pi}{(2^{2m-1} - 2^{1-2m})(2m-1)}$

$b_{2m} = 0, m = 1, 2, 3, \dots$

A solução geral é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2n-1}{n} \frac{1-2m}{n} \right] \cdot \frac{-4\pi}{(2^{2m-1} - 2^{1-2m})(2m-1)} \sin((2m-1)\theta)$$