

Prova II- Cálculo IV

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. Respostas sem justificativa e/ou cálculos não serão consideradas.

1. Encontre o potencial eletrostático no interior de um hemisfério sólido de raio R . A base está aterrada e a superfície do hemisfério é mantida a um potencial constante igual a V .
2. Suponha que um transistor ocupa um intervalo $0 \leq x \leq L$ e que $h(x, t)$ é a concentração de cargas positivas na posição x no tempo t . Pode-se mostrar que h satisfaz o seguinte sistema

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\eta}{L} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$h(0, t) = h(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad h(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

onde η , K e a são constantes positivas e f é uma função adequada. Proponha $h(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x, t)$ e encontre α e β de forma tal que u satisfaça o problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^{-\frac{\eta x}{2L}} f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Resolva a equação para u pelo método da separação de variáveis e escreva a solução final h do problema.

3. Encontre todos os vértices de um polígono regular de n lados se seu centro se encontra em $z = 0$ e um dos seus vértices corresponde a um ponto dado $w \in \mathbb{C}$.
4. Se, em alguma região aberta $A \subset \mathbb{C}$, $f = u + iv$ e sua complexa conjugada $\bar{f} = u - iv$ são ambas holomorfas, prove que f é constante em A .

Fórmulas:

Equação de Laplace em coordenadas esféricas:

$$u_{\rho\rho} + 2\rho^{-1}u_{\rho} + \rho^{-2}(\sin\phi)^{-2}u_{\theta\theta} + \rho^{-2}u_{\phi\phi} + \rho^{-2}(\cot g\phi)u_{\phi} = 0.$$

Equações de Cauchy-Riemann: $u_x(x, y) = v_y(x, y)$, $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$

$$w^{1/n} = |w|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Equação de Legendre: $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$

$$(1) \mu(r, \phi) = B(r) X(\phi)$$

$$\begin{cases} \mu_{rr} + 2r^{-1}\mu_r + r^{-2}\mu_{\phi\phi} + r^{-2}\cot\phi \mu_\phi = 0 & 0 < r < R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu(R, \phi) = V, & 0 \leq \phi < \pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu(r, \pi/2) = 0, & 0 \leq r < R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu(r, \phi) \text{ limitada quando } r \rightarrow 0^+ \text{ e } 0 \leq \phi < \pi/2 \end{cases}$$

$$B''(r)X(\phi) + 2r^{-1}B'(r)X(\phi) + r^{-2}B(r)X''(\phi) + r^{-2}\cot\phi B(r)X'(\phi)$$

$$X(\phi) [B''(r) + 2r^{-1}B'(r)] = -B(r) [r^{-2}X''(\phi) + r^{-2}\cot\phi X'(\phi)]$$

$$-(r^2 B''(r) + 2r B'(r)) = -(X''(\phi) + \cot\phi X'(\phi)) = -\lambda \frac{X(\phi)}{X(\phi)}$$

$$\begin{cases} X''(\phi) + \cot\phi X'(\phi) + \lambda X(\phi) = 0 \\ \lim_{\phi \rightarrow 0^+} X(\phi) \text{ existe} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B(r)X(\pi/2) = 0 \Rightarrow X(\pi/2) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} B(r) \text{ existe} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 B''(r) + 2r B'(r) + \lambda B(r) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} B(r) \text{ existe} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X''(\phi) + \cot\phi X'(\phi) - \lambda X(\phi) = 0, & 0 < \phi < \pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X \text{ limitada em } \phi = 0 \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável $w = \cos \phi$ e definindo

$$H(w) = H(\cos \phi) = X(\phi) \text{ temos}$$

$$X'(\phi) = H'(w) \cdot \frac{dw}{d\phi} = -H'(w) \sin \phi, \quad X''(\phi) = +H''(w) \sin^2 \phi - \cos \phi H'(w)$$

$$+ H''(w) \sin^2 \phi - (\cos \phi H'(w) + \cot \phi (-H'(w) \sin \phi) + \lambda H(w) = 0, \quad <$$

$$+ H''(w) \sin^2 \phi - 2 \cos \phi H'(w) + \lambda H(w) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H''(w) \sin^2 \phi - 2 \cos \phi H'(w) + \lambda H(w) = 0, \\ H(0) = 0 \end{array} \right. \quad 0 < w < 1$$

$$H \text{ limitada em } w=1$$

$$\checkmark \left\{ \begin{array}{l} (1-w^2) H''(w) - 2w H'(w) + \lambda H(w) = 0, \\ H(0) = 0, \end{array} \right. \quad 0 < w < 1$$

$$H_m(w) = P_m(w)$$

Como queremos $H(0)=0 \Rightarrow$ Somente polinômios de Legendre com m ímpar.

Assim o problema tem auto-funções: $X(\phi) = P_{2m-1}(\cos \phi)$

$m=0, 1, 2, \dots$ com auto valores $\lambda_{2m-1} = (2m-1)2m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{d\phi^2} P_{2m-1}(\phi) + 2\phi \frac{d}{d\phi} P_{2m-1}(\phi) - (2m-1)2m P_{2m-1}(\phi) = 0, \end{array} \right. \quad 0 < \phi < \pi$$

$$\rightarrow \text{Eq. Euler: } P_{2m-1}(\phi) = \phi^\alpha$$

$$\phi^{\alpha} \alpha(\alpha-1) \phi^{\alpha-1} + 2\phi^{\alpha} \phi^{\alpha-1} - (2m-1)2m \phi^{\alpha} = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - (2m-1)2m = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha+1) - (2m-1)2m = 0$$

$$\alpha_1 = 2m-1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -2m$$

$$P_{2m-1}(\phi) = C_{2m-1} \phi^{2m-1}$$

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} P_{2n-1}(\cos \phi)$$

$$u(R, \phi) = V = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} R^{2n-1} P_{2n-1}(\cos \phi)$$

$$\int_0^{\pi/2} V P_{2n-1}(\cos \phi) \sin \phi d\phi = c_{2n-1} R^{2n-1} \int_0^{\pi/2} P_{2n-1}(\cos \phi) \sin \phi d\phi$$

Let $w = \cos \phi$ $dw = -\sin \phi d\phi$, then

$$\int_0^1 V P_{2n-1}(w) dw = c_{2n-1} R^{2n-1} \int_0^1 P_{2n-1}(w) dw$$

$$c_{2n-1} = \frac{V \int_0^1 P_{2n-1}(w) dw}{R^{2n-1} \int_0^1 P_{2n-1}^2(w) dw}$$

$$u(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} V \frac{\int_0^1 P_{2n-1}(w) dw}{\int_0^1 P_{2n-1}^2(w) dw} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1} P_{2n-1}(\cos \phi)$$

(2) $h(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x, t)$

$$h_t = \beta e^{\alpha x + \beta t} u + e^{\alpha x + \beta t} u_t$$

$$h_{xt} = \alpha e^{\alpha x + \beta t} u + e^{\alpha x + \beta t} u_{xt}$$

$$h_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta t} u + \alpha e^{\alpha x + \beta t} u_x + \alpha e^{\alpha x + \beta t} u_x + e^{\alpha x + \beta t} u_{xx}$$

$$= e^{\alpha x + \beta t} [\alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx}]$$

$$e^{\alpha x + \beta t} \left[\beta u + u_t \right] = a^2 e^{\alpha x + \beta t} \left[\alpha^2 u + 2\alpha u_x + u_{xx} - \frac{\eta}{L} \alpha u - \frac{\eta}{L} u_x \right]$$

Fazendo

$$\beta = a^2 \left(\alpha^2 - \frac{\eta}{\alpha L} \right) \quad \left\{ \quad 2\alpha - \frac{\eta}{L} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\eta}{2L} \right.$$

$$\beta = a^2 \left[\frac{\eta^2}{4L^2} - \frac{\eta \cdot \eta}{L \cdot 2L} \right] \Rightarrow \beta = -a^2 \frac{\eta^2}{4L^2}$$

obtemos

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = e^{-\beta t} h(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(L,t) = e^{-\alpha L - \beta t} h(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = e^{-\alpha x} h(x,0) = e^{-\frac{\eta x}{2L}} f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Propoziția $u(x,t) = X(x) T(t)$, inferimos

$$T'(t) X(x) = a^2 X(x) T'(t), \quad \forall 0 < x < L, t > 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, t > 0$$

$$\hookrightarrow \lambda = 0, \text{ temos } X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$$

$$X(0) = a = 0 \quad X(L) = b = 0$$

$$X(x) = 0, \quad \lambda = 0 \text{ não é autovalor}$$

4) Como f é holomorfa em A temos:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{em } A.$$

Mas $\bar{f} = u - iv$ também é holomorfa em A ,
logo

$$u_x = -v_y, \quad u_y = -(-v_x) = v_x \quad \text{em } A.$$

Logo,

$$u_x = v_y = -u_x \Rightarrow 2u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 \quad \text{em } A$$

$$u_y = -v_x = -u_y \Rightarrow 2u_y = 0 \Rightarrow u_y = 0 \quad \text{em } A$$

Portanto $u \equiv \text{constante}$ em A , o mesmo é
válido para v .

Assim f é constante em A .

$$\bullet \lambda < 0, \text{ temos } X''(x) - \kappa^2 X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x}$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$X(L) = C_1 e^{\kappa L} + C_2 e^{-\kappa L} = 0 \Rightarrow C_1 (e^{\kappa L} - e^{-\kappa L}) = 0 \Rightarrow \sinh(\kappa L) = 0$$

$$C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$\lambda < 0$ não é autovalor

$$\bullet \lambda > 0, \quad X''(x) + \kappa^2 X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)$$

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(L) = C_2 \sin(\kappa L) = 0 \Rightarrow \kappa L = m\pi$$

$$\kappa = \frac{m\pi}{L}$$

$$\lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{é autovalor}$$

$$\text{Autofunções: } X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$T_m''(t) + \frac{m^2 \pi^2 a^2}{L^2} T_m(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[e^{\frac{m^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} T_m(t) \right] = 0$$

$$\text{Logo } T_m(t) = C_m e^{-\frac{m^2 \pi^2 a^2}{L^2} t}$$

A solução é dada na forma:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} C_m e^{-\frac{m^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$u(x, 0) = e^{-\frac{\eta x}{2L}} f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$C_m = \frac{\int_0^L e^{-\frac{\eta x}{2L}} f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx} = \frac{2}{L} \int_0^L e^{-\frac{\eta x}{2L}} f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$\forall m \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

Logo

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{L} \int_0^L e^{-\frac{\pi^2 m^2 a^2 t}{L^2}} f(\xi) \sin\left(\frac{m\pi \xi}{L}\right) d\xi \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2 m^2 a^2 t}{L^2}}$$

Sol. final:

$$h(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x,t) e^{-\left(\frac{m^2 \pi^2 a^2}{L^2} + \frac{\beta^2 a^2}{4L^2}\right)t}$$

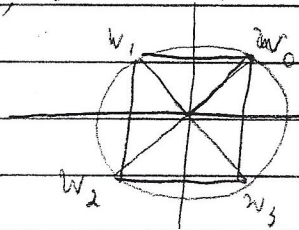
$$= 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^L e^{\frac{\beta}{2L}(x-\xi)} f(\xi) \sin\left(\frac{m\pi \xi}{L}\right) d\xi e^{-\left(\frac{m^2 \pi^2 a^2}{L^2} + \frac{\beta^2 a^2}{4L^2}\right)t}$$

3) Suponha que o vértice conhecido seja um ponto do $\mathbb{R}^2$ correspondendo ao m^o complexo

$$w = \pi_0 e^{i\theta_0}$$

Como as m -ésimas raízes de w estão localizadas sobre a circunferência de raio $\pi_0^{1/m}$ de forma a dividir o círculo em m partes iguais, esses pontos são os vértices do polígono.

Por exemplo, se $m=4$ temos:



Então os vértices do polígono são:

$$w_0 = \pi_0^{1/m} \left[\cos\left(\frac{\theta_0}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_0}{m}\right) \right]$$

$$w_1 = \pi_0^{1/m} \left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{m}\right) \right]$$

$$w_{m-1} = \pi_0^{1/m} \left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2(m-1)\pi}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta_0 + 2(m-1)\pi}{m}\right) \right]$$