

Prova II - Cálculo E - 2013/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Justifique sua resposta de forma precisa.**
Soluções sem justificativa e/ou cálculos não serão aceitas.

- 3,0 1. Encontre a série de Fourier da função f cujo período é 2π , sendo que f é definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = -\pi \\ -2, & \text{se } \pi/2 \leq |x| < \pi \\ 0, & \text{se } |x| < \pi/2 \end{cases}$$

Análise a convergência da série obtida para $x \in [-\pi, \pi]$.

2. Resolva o problema abaixo:

3,5
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \cos(x), \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0, t) = \beta_1, \quad u(\pi, t) = \beta_2, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

- 3,5 3. Encontre a distribuição estacionária de temperatura num retângulo $[0, a] \times [0, b]$. O lado do retângulo correspondente a $x = 0$ é mantido à temperatura zero. O lado do retângulo correspondente a $x = a$ é mantido à temperatura constante T_1 e os lados do retângulo correspondente a $y = 0$ e $y = b$ são mantidos isolados.

Fórmulas:

Série de Fourier: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})]$, $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx$ para $n \geq 0$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$ para $n \geq 1$

Série de Fourier Cosseno: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L})$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx$, para $n \geq 0$

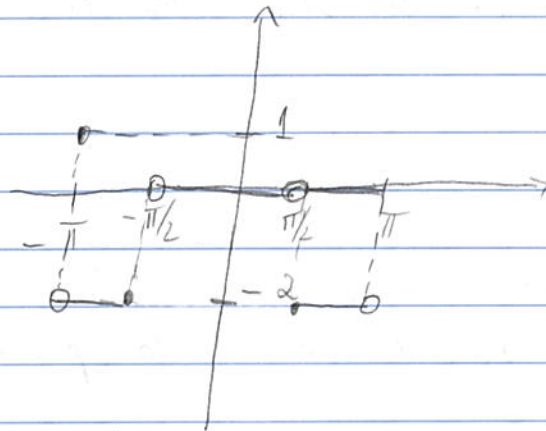
Série de Fourier Seno: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$ para $n \geq 1$

Problema de Sturm-Liouville:

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < L \\ X(0) &= X(L) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin(n\pi x/L), \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

Resolução Prova II - Cálculo E 2013/01

① $L = \pi$



função Par, logo $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-2) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-2) dx \right] = \frac{-2}{\pi} \left[2 \cdot \frac{\pi}{2} \right] = -2$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos(mx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(mx) dx \right]$$

$$= \left(-\frac{2}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{m}\right) \left[\sin(mx) \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \sin(mx) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right]$$

$$= -\frac{2}{\pi m} \left[-\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right]$$

$$= +\frac{4}{\pi m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

Série de Fourier $\left\{ -1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{-4}{\pi m}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos(mx) \right\}$

Convergência: A série converge para
$$\begin{cases} -2 & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2] \\ -1 & \text{se } x = -\pi/2 \text{ ou } \pi/2 \\ 0 & \text{se } |x| < \pi/2 \end{cases}$$

(2) Seja $\chi(x)$ a solução do problema
$$\begin{cases} \chi''(x) + \cos(x) = 0 \\ \chi(0) = \beta_1, \chi(L) = \beta_2 \end{cases}$$

$$\chi'(x) = -\int \cos(x) dx = -\sin(x) + C_1 \Rightarrow \chi(x) = \cos(x) + C_1 x + C_2$$

$$\chi(0) = 1 + C_2 = \beta_1 \Rightarrow C_2 = \beta_1 - 1, \quad \chi(\pi) = \cos(\pi) + C_1 \cdot \pi + C_2$$

$$C_1 = \frac{1 - C_2 + \beta_2}{\pi}$$

$$C_1 = \frac{2 + \beta_2 - \beta_1}{\pi}$$

Fazendo $u(x,t) = v(x,t) + \chi(x)$, v satisfaz

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0$$

$$v(x,0) = f(x) - \chi(x)$$

Sabemos q-
$$v(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^{\pi} (f(\xi) - \chi(\xi)) \sin(n\xi) d\xi \right] \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

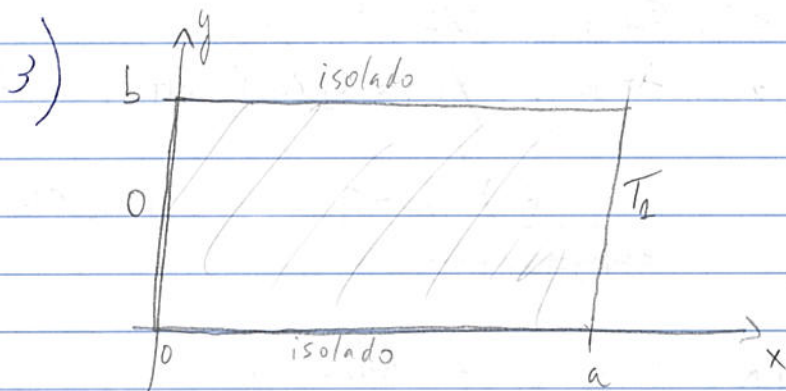
Logo

$$u(x,t) = \cos(x) + \left(\frac{2 + \beta_2 - \beta_1}{\pi} \right) \cdot x + (\beta_1 - 1) + v(x,t), \text{ com}$$

$v(x,t)$ dado acima.

$$v(\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = T_1, & 0 < y < b \\ u_y(x, b) = u_y(x, 0) = 0, & 0 < x < a \end{cases}$$

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$$

$$u_y(x, b) = X(x)Y'(b) = 0 \Rightarrow \boxed{Y'(b) = 0}$$

$$u_y(x, 0) = X(x)Y'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y'(0) = 0}$$

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & 0 < y < b \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Caso $\lambda = 0$: $Y''(y) = 0 \Rightarrow Y(y) = c_1 y + c_2 \Rightarrow Y'(y) = c_1$

$$Y'(0) = Y'(b) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\boxed{Y(y) = 1} \Rightarrow$$

Autofunção
associada ao
autovalor $\lambda_0 = 0$.

$\rightarrow$ (caso $\lambda < 0$): Solução trivial apenas.

$\rightarrow$ (caso $\lambda > 0$: $\lambda = K^2$, $Y(y) = C_1 \cos(Ky) + C_2 \sin(Ky)$

$$Y'(y) = -C_1 K \sin(Ky) + C_2 K \cos(Ky)$$

$$Y'(0) = C_2 K = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$Y(b) = -C_1 K \sin(Kb) = 0 \Rightarrow Kb = n\pi \Rightarrow \boxed{K = \frac{n\pi}{b}} \quad n=1, 2, \dots$$

Autovalores: $Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $n=0, 1, 2, \dots$
 $\hookrightarrow$ autovalores;

$$X_m''(x) - \lambda_m X_m(x) = 0, \quad X_m(0) = 0.$$

Para $m=0 \Rightarrow X_0''(x) = d_0 x + d_2 \Rightarrow \boxed{X_0(x) = d_0 x}$

$$X_m''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_m(x) = 0 \Rightarrow X_m(x) = d_m \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + q_m \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

$$X_m(0) = 0 \Rightarrow 0 = q_m \Rightarrow X_m(x) = d_m \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

$$\text{Solução: } u(x, y) = X_0 Y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n Y_n = d_0 x \cdot 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$u(a, y) = T_I = d_0 a + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$2d_0 a = \frac{2}{b} \int_0^b T_I dy \Rightarrow \boxed{d_0 = \frac{T_I}{a}}$$

$$d_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \int_0^b T_I \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy = \frac{2T_I}{b \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} \cdot \frac{b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \Big|_0^b = 0$$

Solução final:

$$\boxed{u(x, y) = \frac{T_I}{a} x}$$