

Prova II - Cálculo IV - 2014/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Encontre uma representação em série de potências para a função

2,5

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$$

válida para todo $x \in]-1/2, 1/2[$.

2. Estime o erro ao utilizarmos a aproximação

2,5

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x$$

quando $|x| < 1/2$.

3. Represente graficamente as seguintes regiões do plano:

1,5

a. $A = \{z \in \mathbb{C}, z^6 + 64 = 0\}$.

1,5

b. $A = \{z \in \mathbb{C}, e^{i\bar{z}} = i\}$.

2,0

4. Seja $f(z) = (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(\bar{z}))\bar{z}$. Determine onde $f'(z)$ existe e encontre $f'(z)$ para estes valores. Verifique se existe alguma região aberta A onde f é holomorfa.

$$(1) \quad \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \quad \text{se} \quad |x| < \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^n x^{n-1} \quad \text{se} \quad |x| < \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{(1-2x)^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{n-1} x^{n+1} \quad \text{para } |x| < \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4(1-x/4)}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando a fórmula de Taylor (binomial) temos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{x}{4}\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right) \cdot \left(-\frac{x}{4}\right)^n}{n!} \right]$$

Ou seja $\frac{1}{\sqrt{4-x}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x$ é uma aproximação de ordem

um, cujo erro $r_1(x)$ satisfaz

$$|r_1(x)| \leq M \cdot \frac{|x|^2}{2!} \quad \text{se} \quad |f''(y)| \leq M, \quad \forall y \in [0, x] \quad (\text{ou } y \in [x, 0])$$

$$\text{Mas } f'(y) = -\frac{1}{2} (4-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} (4-x)^{-3/2}$$

$$f''(y) = -\frac{3}{4} (4-x)^{-5/2} \cdot (-1) = \frac{3}{4} (4-x)^{-5/2}, \quad \text{logo}$$

quando $|y| < 1/2$, temos $-1/2 < y < 1/2$

$$4 - \frac{1}{2} < 4 - y < 4 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} < 4 - y < \frac{9}{2}$$

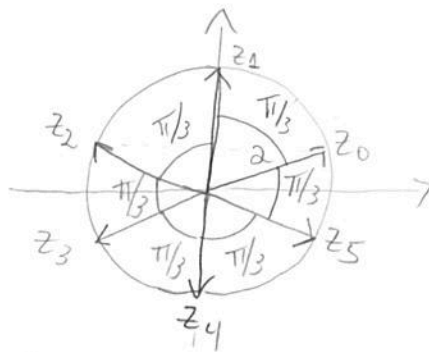
Logo $\frac{2}{9} < \frac{1}{4-y} < \frac{2}{7}$ e $0 < \frac{1}{(4-y)^{5/2}} < \left(\frac{2}{7}\right)^{5/2}$

que implica em $|f''(y)| \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{5/2} \cdot \frac{3}{4}$ se $|y| < 1/2$.

Portanto $|R_2(x)| \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{5/2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{|x|^2}{2} < \left(\frac{2}{7}\right)^{5/2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{5/2}$

3a) $A = \{z \in \mathbb{C}, z^6 = -64\}$, $z = [-64]^{1/6} \rightarrow z_k = 2 e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)}$,

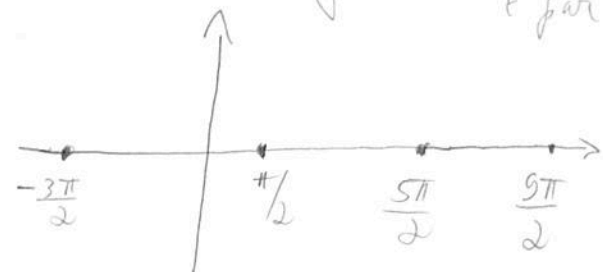
$k = 0, 1, \dots, 5$



b) $e^{i\bar{z}} = i \Rightarrow e^{i(x-yi)} = i \Rightarrow e^{ix} \cdot e^y = i \Rightarrow e^y (\cos(x) = 0, \sin(x) = 1)$

Logo $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^y \cdot (-1)^k = 1 \Rightarrow y = 0$ se k é par

Portanto $A = \left\{ \left(\frac{(4m+1)\pi}{2}, 0 \right), m \in \mathbb{Z} \right\}$,



4) $f(x+iy) = (x+(-y)) \cdot (x-iy) = x(x-y) + (-y)(x-y)i$

$u = x - xy$

$v = y^2 - yx$

$u_x = 2x - y$

$v_x = -y$

$u_y = -x$

$v_y = 2y - x$

$u_x = v_y \Rightarrow 2x - y = 2y - x \Rightarrow y = x$

$-x = y \Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow x = 0$ e $y = 0$

$f'(0) = u_x(0,0) + i v_x(0,0) = 0$. Não existe região aberta A onde f é holomorfa.