

Ministério da Educação  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Campus Reitor João David Ferreira Lima

Disciplina: MTM 5164-Cálculo D  
Professor: Luciano Bedin

Prova 2 - 28/10/2015

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

Instruções: \_\_\_\_\_ Nota: \_\_\_\_\_

- 1) Não serão aceitas respostas sem justificativa e/ou cálculos;
- 2) Não é permitido o uso de celulares e afins. Pode-se utilizar calculadora não programável.

Questões:

- 3,0 1. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y''(x) + x^2 y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

na forma de série de potências.

2. Classifique cada série abaixo em divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente.

1,5 a.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$

2,0 b.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n [\ln(n)]^2}{n}$

- 1,5 3. Encontre uma aproximação para

$$\int_0^{0,2} (\arctg(x^3) + \sin(x^3)) dx$$

com precisão de  $10^{-5}$ .

- 2,0 4. Estime o erro ao utilizarmos a aproximação

$$\frac{1}{\sqrt{4+3x^3}} \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} x^3 \right),$$

para  $|x| < \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}$ .

Fórmulas:

Série de Taylor:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Desigualdade de Taylor:  $|r_n(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ , se  $|f^{(n+1)}(y)| \leq M$  quando  $y \in [x_0, x_0+h]$  (ou  $y \in [x_0-h, x_0]$ )

Série Binomial:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

Erro série alternada:  $|s - s_N| \leq b_{N+1}$

# Resolução P2 - Cálculo D - 2015/02

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad y(x) &= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m \\ y'(x) &= c_1 + \sum_{m=2}^{\infty} m c_m x^{m-1} \\ y''(x) &= 2c_2 + \sum_{m=3}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} y(0) = \boxed{c_0 = 1} \\ y'(0) = \boxed{c_1 = 0} \end{array} \right.$$

Substituindo na E.D.O.:

$$2c_2 + \sum_{m=3}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} + c_0 x^2 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^{m+2} = 0$$

$$2c_2 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^{m+2} + c_0 x^2 + \sum_{m=3}^{\infty} c_m x^m = 0$$

$$\begin{aligned} &2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 x + 4 \cdot 3 \cdot c_4 x^2 + c_0 x^2 + \\ &+ \sum_{m=3}^{\infty} [(m+2)(m+1) c_{m+2} + c_m] x^m = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{c_2 = 0}, \quad 3 \cdot 2 \cdot c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = 0}$$

$$4 \cdot 3 \cdot c_4 = -c_0 \Rightarrow \boxed{c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}}$$

$$c_{m+2} = -\frac{c_{m-2}}{(m+2)(m+1)}, \quad m \geq 3$$

$$\rightarrow c_5 = 0, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = -\frac{c_4}{8 \cdot 7} = \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$c_9 = 0, \quad c_{10} = 0, \quad c_{11} = 0, \quad c_{12} = -\frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}$$

Generalizando:

$$C_{4m} = (-1)^m \cdot \frac{1}{(4m) \cdot (4(m-1)) \cdot (4(m-2)) \dots 4 \cdot (4m-1)(4m-5) \dots 3}$$

$$C_{4m} = \frac{(-1)^m}{4^m m! (4m-1)(4(m-1)-1)(4(m-2)-1) \dots (4(m-j)-1) \dots 3}$$

$j=0$  se  $j \neq 4m$ .

Solução final:

$$y(x) = C_0 + C_4 x^4 + C_8 x^8 + C_{12} x^{12} + \dots + C_{4m} x^{4m} + \dots$$

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{(8 \cdot 7)(4 \cdot 3)} x^8 + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4^m m! (4m-1)(4m-5) \dots 3} x^{4m}$$

$$\textcircled{2} \text{ a) } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(n+1)^2 - n + 1}{2^{n+1}} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

Série absolutamente convergente, pelo teste da razão.

Seja  $b_n = \frac{[\ln(n)]^2}{n}$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$ii) f'(x) = \frac{2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot (\ln(x))^2}{x^2} = \frac{\ln(x) \cdot [2 - \ln(x)]}{x^2} < 0$$

se  $\ln(x) > 2$  (ou seja se  $x > e^2$ )

Portanto  $f$  é decrescente em  $[e^2, +\infty[$  e  $\{b_n\}_{n=9}^{+\infty}$  é decrescente (pois  $e^2 < 9$ )

Pelo teste de Leibniz, a série é convergente.

$$\text{No entanto, } \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n (\ln(n))^2}{n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{[\ln(n)]^2}{n} \text{ é}$$

divergente, pois

$$\int_2^{+\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{[\ln(x)]^2}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln^3(t)}{3} - \frac{\ln^3(2)}{3} \right] = +\infty,$$

pelo teste da integral. A série é condicionalmente convergente.

$$3) \arctg(x^3) + \operatorname{sen}(x^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^3)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^3)^{2n+1} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{(2n+3)!} \right] x^{6n+3}, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^{0,2} \arctg(x^3) + \operatorname{sen}(x^3) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+4)!} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{(2n+3)!} \right) \left( \frac{1}{5} \right)^{6n+4}$$

$$|S - S_N| \leq b_{N+1} = \frac{1}{6N+10} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{(2N+3)!} \right) \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{6N+10}$$

$$\text{Para } N=0, \quad |S - S_N| \leq \frac{1}{10} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3!} \right] \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{10} < 10^{-5}$$

Pontanto,  $\int_0^{0,2} [\arctg(x^3) + \sec(x^3)] dx \approx \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{1}{5^4} \right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^4}$

com precisão de  $10^{-5}$ .

$$2) \frac{1}{\sqrt{4+3x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{3x^2}{4}}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(-\frac{3x^2}{4}\right)\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{3x^3}{16}$$

Considere a função  $g(y) = \frac{1}{2}(1+y)^{-1/2}$ . Então

$$g'(y) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (1+y)^{-3/2} = -\frac{1}{4} (1+y)^{-3/2}$$

$$g''(y) = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1+y)^{-5/2} = \frac{3}{8} (1+y)^{-5/2}$$

Se  $|y| < \frac{1}{2}$ , temos  $1 - \frac{1}{2} < 1+y < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1+y < \frac{3}{2}$

Assim  $|y| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{(1+y)^{5/2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2}$

$$|g''(y)| \leq \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} = M. \text{ Portanto,}$$

$$\frac{1}{2}(1+y)^{-1/2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y \text{ com erro } R_2(y), \text{ sendo}$$

$$|R_2(y)| \leq M \frac{|y|^2}{2!} < \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2^8 \sqrt{2}} \text{ se } |y| < \frac{1}{2}$$

Escolhendo  $y = \frac{3}{4}x^3$  com  $|x| < \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}$ , então  $|y| < \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

logo

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3x^3}{4}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{2} - \frac{3x^3}{16} \text{ com precisão de}$$

$$\frac{3}{2^8 \sqrt{2}}$$