

Prova II - Cálculo D - 2018/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Classifique cada série abaixo em divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente:

2,0

a. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$

1,5

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

2,5

2. Encontre a solução geral em série de potências para a EDO

$$y'' - 2xy' + y = 0.$$

3. Encontre uma aproximação para a integral

2,0

$$\int_0^1 \cos(x^3) dx$$

com erro menor do que 10^{-4} .

4. Estime o erro ao utilizarmos a aproximação

2,0

$$\sqrt[4]{1+2x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \text{sendo } 0 < x < \frac{1}{128}.$$

Fórmulas:

Série de Taylor: $f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Desigualdade de Taylor: $|r_n(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, se $|f^{(n+1)}(y)| \leq M, \forall y \in [x_0 - d, x_0 + d]$

Série Binomial:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

Erro série alternada: $|s - s_N| < b_{N+1}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Resolução P2 - (Cálculo D) - 2018/02

1) a) $b_n = \frac{1}{\ln(n)}$, $n=2,3,\dots$

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$, pois $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$.

ii) $\ln(n+1) > \ln(n) \Rightarrow \frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow \{b_n\}_{n=2}^{+\infty}$

é decrescente.

Logo, pelo teste de Leibniz, a série converge.

Por outro lado,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(n)} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \quad \text{Como}$$

$\ln(n) < n$, temos $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ e a série

diverge, pelo Teste da comparação. Assim,

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ é condicionalmente convergente.

b) Usando o Teste da razão

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{3^n n^2} \cdot \frac{n!}{3^n n^2}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \frac{(n+1)}{n^2} = 0 < 1$$

Logo a série converge absolutamente.

2) Propondo $y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ temos

$$y'(x) = c_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$y'(x) = 2c_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n c_n (n-1) x^{n-2}$$

Assim, substituindo na EDO:

$$2c_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n c_n (n-1) x^{n-2} - 2x c_1 - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n + c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+2) c_{n+2} (n+1) x^n$$

$$2c_2 + (3 \cdot c_3 \cdot 2 \cdot x + c_1 x) - 2x c_1 + c_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+2) c_{n+2} (n+1) - 2n c_n + c_n] x^n$$

$$(2c_2 + c_0) + (3 \cdot 2 \cdot c_3 - c_1) x + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} + c_n (1-2n)] x^n = 0$$

Logo $2c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2}$

$3 \cdot 2 c_3 - c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} c_1$

$(n+2)(n+1) c_{n+2} + c_n (1-2n) = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \frac{c_n (2n-1)}{(n+2)(n+1)}, n=2,3,\dots$

p/ $n=2$, temos $c_4 = \frac{c_2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = -\frac{c_0 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{3 c_0}{4!}$

p/ $n=3$, temos $c_5 = \frac{c_3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{c_1 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 c_1}{5!}$

p/ $n=4$, temos $c_6 = \frac{c_4 \cdot 7}{6 \cdot 5} = -\frac{c_0 \cdot 7 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{7 \cdot 3 c_0}{6!}$

p/ $n=5$, temos $c_7 = \frac{c_5 \cdot 9}{7 \cdot 6} = \frac{5 \cdot c_1 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 c_1}{7!}$

Logo: $C_{2k} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \dots (4k-1) \cdot (4k-5)}{(2k)!} C_1, \quad k=2, 3, \dots$

$$C_{2k-1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4k-3)}{(2k-1)!} C_1, \quad k=3, 4, \dots$$

Assim a solução é dada por

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots = C_0 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{4!} x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \dots (4k-5)}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right) \\ + C_1 \left(x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{5}{5!} x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} x^7 + \dots + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4k-3)}{(2k-1)!} x^{2k-1} + \dots \right)$$

$m=0$ (3) $\cos(x^3) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (x^3)^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{6m}$

$$\int_0^1 \cos(x^3) dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_0^1 x^{6m} dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(6m+1)(2m)!} x^{6m+1} \Big|_0^1 \\ = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(6m+1)(2m)!}$$

Esta é uma série alternada com $b_m = \frac{1}{(6m+1)(2m)!}$

i) Como $m+1 > m$ temos $(6(m+1)+1)(2(m+1))! > (6m+1)(2m)!$ e assim $b_{m+1} < b_m$, ou seja, $\{b_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é decrescente.

ii) Também $\frac{1}{(6m+1)(2m)!} < \frac{1}{6m+1}$ e $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{6m+1} = 0$,

logo $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = 0$.

Pela estimativa de erro de Leibniz, temos

$$|S - S_N| \leq \frac{1}{N+1} \Rightarrow |S - S_N| \leq \frac{1}{(6(N+1)+1)(2(N+1))!} < 10^{-6}$$

Se $N=3$. Logo

$$\int_0^1 \cos(x^3) dx \approx \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{1}{(6n+1)(2n)!} \quad \text{(com erro}$$

menor do que 10^{-6} .)

(4) $f(x) = (1+2x)^{1/4}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)(1+2x)^{-3/4} \cdot 2 = \frac{1}{2} (1+2x)^{-3/4} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2 (1+2x)^{-7/4} = -\frac{3}{4} (1+2x)^{-7/4}$$

Logo $\sqrt[4]{1+2x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ é uma aproximação de nível 1. Com isso:

$$|R_1(x)| \leq M \frac{|x|^2}{2!}, \quad \text{com } |f''(t)| \leq M, \quad \forall t \in [0, d]$$

para $d = \frac{1}{128}$.

Como $|f''(t)| = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1+2t)^{7/4}}$ temos $|f''(t)| \leq \frac{3}{4}$

para $t \in [0, \frac{1}{128}]$ pois $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(1+2t)^{7/4}}$ é decrescente

Assim $|R_1(x)| \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x|^2 \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(128)^2}$ se $0 < x < \frac{1}{128}$