

Prova II - Cálculo 4 - 2019/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

(2,0)

1. Represente a função $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt[6]{64-x}}$ em série de potências para $|x| < 64$.
(Obs.: Somente serão aceitas soluções que apresentem a forma genérica dos coeficientes).

2. Considere o problema de valor inicial

$$y''(x) - xy'(x) - y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

e uma solução da forma

$$y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n.$$

(1,0)
(1,5)
(0,5)

- a. Encontre uma relação de recorrência para os coeficientes c_n .
b. Determine uma fórmula genérica para c_n .
c. Escreva a solução $y(x)$ obtida.
3. O livro de D. W. Jorgenson, J. J. McCall e R. Radner: *Optimal Replacement Policy*, North-Holland Pub. Co, 1967, é um tratado sobre a manutenção de equipamentos. Nele aparece o seguinte argumento:
"Suponha que a densidade de probabilidade do tempo de falha de um certo equipamento é exponencial, de forma que

(2,0)

$$\frac{e^{\lambda N}}{\lambda} - N = \frac{1}{\lambda} + K.$$

Essa é uma equação para N , sendo que N representa o tempo ótimo entre manutenções periódicas do equipamento. Uma aproximação quadrática para $e^{\lambda N}$ resulta na fórmula

$$N = \sqrt{\frac{2K}{\lambda}}. \quad (1)$$

Nesse argumento λ e K são constantes: λ representa a probabilidade de ocorrência de falhas e K o tempo para efetivar o reparo. Explique como a fórmula (1) para N é obtida. Encontre uma cota superior para o erro absoluto de aproximação supondo que $N \in [0, N_0]$, para um certo N_0 .

(3,0)

4. Seja $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Explique como podemos fazer uma extensão de f de forma a ela ficar definida em $\mathbb{R}$, seja periódica e a série de Fourier da função resultante seja da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} \left(\frac{(2k-1)\pi x}{2T} \right).$$

Justifique porque o coeficiente b_k é necessariamente da forma

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{(2k-1)\pi x}{2T} \right) dx$$

e analise a convergência da série de Fourier para $x \in [0, T]$.

Fórmulas

1. Série de Taylor: $f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$

2. Desigualdade de Taylor: $|R_N(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{N+1}}{(N+1)!}$, se $|f^{(N+1)}(y)| \leq M$, $\forall y \in [x_0, x]$
(ou $\forall y \in [x, x_0]$).

3. Série Binomial: Para $|x| < 1$,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

4. Série de Fourier:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right],$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Novo II - Cálculo IV - 2019/02

$$(1) \sqrt[6]{64-x} = \sqrt[6]{64 \left(1 - \frac{x}{64}\right)} = 2 \left(1 - \frac{x}{64}\right)^{1/6}$$

$$f(x) = \frac{x^4}{\sqrt[6]{64-x}} = \frac{1}{2} x^4 \cdot \left(1 - \frac{x}{64}\right)^{-1/6}$$

$$\left(1 - \frac{x}{64}\right)^{-1/6} = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{x}{64}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}-1\right) \cdot \left(-\frac{x}{64}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}-1\right)\left(-\frac{1}{6}-2\right) \cdot \left(-\frac{x}{64}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!}$$

$$+ \dots + \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{6}-1\right)\left(-\frac{1}{6}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{6}-m+1\right) \cdot \left(-\frac{x}{64}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{x}{64}\right)^{-1/6} = 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2^6} + \frac{1 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{x^2}{2^{12}} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1 \cdot 7 \cdot 13}{6^3} \cdot \frac{x^3}{2^{18}} \cdot \frac{1}{3!}$$

$$+ \dots + \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \dots (6m-5)}{6^m \cdot 2^{6m}} \cdot \frac{x^m}{m!} + \dots, \quad \left|\frac{x}{64}\right| < 1$$

Logo, se $|x| < 64$, temos

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{6} \cdot \frac{x^5}{2^6} + \frac{1 \cdot 7}{6^2} \cdot \frac{x^7}{2^{12}} \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \dots (6m-5)}{6^m \cdot 2^{6m}} \cdot \frac{x^{m+4}}{m!} + \dots$$

$$(2) y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad y(0) = 1 \Rightarrow \boxed{c_0 = 1}$$

$$y'(x) = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'(0) = -1 \Rightarrow \boxed{c_1 = -1}$$

$$y''(x) = 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Substituindo na EDO:

$$2\left(2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) C_n X^{n-2}\right) - C_1 X - \sum_{n=2}^{\infty} n C_n X^n - C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n X^n = 0$$

$$2\left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} X^n\right) - C_1 X - \sum_{n=2}^{\infty} n C_n X^n - C_0 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n X^n = 0$$

$\Downarrow$
p/m=1, 3.2.C₃X

$\Downarrow$
p/m=1, C₁X

$$2\left(2 + 3.2.C_3 X - C_1 X - C_0 - C_1 X + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)C_{n+2} - n C_n] X^n\right) = 0$$

$$2\left(2 + 3.2.C_3 X + X - 1 + X + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)C_{n+2} - (n+1)C_n] X^n\right) = 0$$

$\boxed{C_2 = +1/2}$ $\boxed{C_3 = -1/3}$ a) $(n+2)C_{n+2} = C_n \Rightarrow C_{n+2} = \frac{C_n}{n+2}, n \geq 2$

b) $n=2, C_4 = \frac{C_2}{4} = \frac{1}{4 \cdot 2}$ $n=4, C_6 = \frac{C_4}{6} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$
 $n=3, C_5 = \frac{C_3}{5} = -\frac{1}{3 \cdot 5}$ $n=5, C_7 = \frac{C_5}{7} = -\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$

Seguindo dessa forma, $C_{2m} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)} = \frac{1}{2^m \cdot m!}$

$$C_{2m-1} = \frac{-1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2m-1)}$$

c) $y(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1}{3 \cdot 5}x^5 + \dots + \frac{1}{2^m \cdot m!}x^{2m} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2m-1)}x^{2m-1} + \dots$

$y(x) = 1 - x - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2m-1)} x^{2m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m \cdot m!} x^{2m}$

$$(3) e^{\lambda N} = 1 + \lambda N + \frac{(\lambda N)^2}{2!} + \frac{(\lambda N)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda N)^n}{n!} + \dots$$

Aproximação quadrática para $e^{\lambda N} \approx 1 + (\lambda N) + \frac{(\lambda N)^2}{2}$

$$\text{Logo } \frac{e^{\lambda N}}{\lambda} - N \approx \frac{1}{\lambda} \left[1 + \lambda N + \frac{\lambda^2 N^2}{2} \right] - N \approx \frac{1}{\lambda} + K$$

$$\frac{1}{\lambda} \left[\frac{\lambda^2 N^2}{2} \right] \approx K, \text{ de onde obtemos } N = \sqrt{\frac{2K}{\lambda}}.$$

Sabemos que $|R_2(x)| \leq M \cdot \frac{x^3}{3!}$ para $|f'''(t)| \leq M$

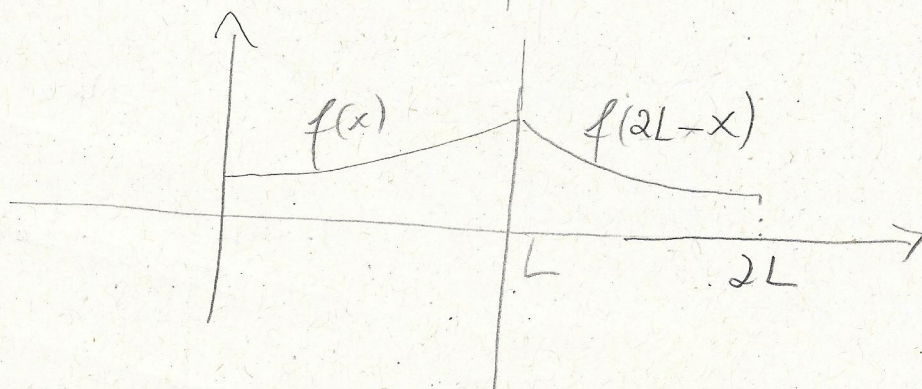
se $t \in [0, x]$ (ou $t \in [x, 0]$). Como $f(t) = e^t$, temos $f'''(t) = e^t$. Trocando x por λN temos

$$|R_2(\lambda N)| \leq M \cdot \frac{(\lambda N)^3}{3!}, \text{ sendo } |e^t| \leq M \text{ para}$$

$t \in [0, \lambda N]$. Mas então $M = e^{\lambda N} \leq e^{\lambda N_0}$, pois

$$N \in [0, N_0]. \text{ Logo, } |R_2(\lambda N)| \leq e^{\lambda N_0} \cdot \frac{(\lambda N_0)^3}{3!}$$

(4) Refletindo f em torno do eixo $x=L$ obtemos a função $f(2L-x)$



Defina $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ f(2L-x), & L \leq x \leq 2L \\ -g(-x), & -2L < x < 0 \end{cases}$
 [periódica de período $4L$]

g é uma função ímpar, logo sua série de Fourier é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$, com $b_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx$.

Dessa forma:

$$b_n = \frac{1}{L} \left[\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx + \int_L^{2L} f(2L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx \right]$$

Fazendo a mudança de variável $w = 2L - x$ temos

$$\int_L^{2L} f(2L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx = \int_L^0 f(w) \sin\left(\frac{n\pi(2L-w)}{2L}\right) (-dw)$$

$$= \int_0^L f(w) \left[\sin(n\pi) \cdot \cos\left(\frac{n\pi w}{2L}\right) - \cos(n\pi) \cdot \sin\left(\frac{n\pi w}{2L}\right) \right] dw =$$

$$= -(-1)^n \int_0^L f(w) \sin\left(\frac{n\pi w}{2L}\right) dw = -(-1)^n \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx$$

Portanto, $b_n = \begin{cases} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) dx, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

e temos que a série de Fourier é dada por $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2L}\right)$ com $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2L}\right) dx$.

A série converge a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ para $0 < x < L$,
 converge a zero para $x=0$ e a $f(L^-)$ em $x=L$.