

Prova II - Cálculo 4 - 2022/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. (2,0 pontos) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período igual a 2π e tal que

Série: 1,0
Convergência: 1,0

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x = -\pi \\ 3 & \text{se } -\pi < x < -\pi/2 \\ 0 & \text{se } -\pi/2 \leq x < 0 \\ -4 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Encontre a série de Fourier de f e analise a convergência da série no intervalo $[-\pi, \pi]$.

2. (2,0 pontos) Classifique cada EDP abaixo pela ordem e se é linear ou não-linear. Caso ela seja de segunda ordem, classifique-a como parabólica, elíptica ou hiperbólica:

0,6
0,9

← 1,5
0,5

a. $y^4 u_{xx} + x^2 u_{yy} + y^2 u_{xy} + u_x - xy(u_y)^2 + \cos(x^2 + y^2)u^4 = 1$

b. $[xu_x]^5 + yu_y - 6u_x = 3x^3y$

Montagem: 0,5
Resolução: 2,5

3. (3,0 pontos) Escreva o problema (EDP e condições de contorno) para a distribuição estacionária de temperatura num retângulo $[0, a] \times [0, b]$. Os lados do retângulo correspondentes a $y = 0$, $y = b$ e $x = a$ são mantidos isolados. O lado do retângulo correspondente a $x = 0$ é mantido a uma temperatura igual a $g(y)$. Resolva o problema através do método da separação de variáveis, apresentando os detalhes da resolução.

4. (3,0 pontos) Resolva o problema abaixo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + e^{\pi-x}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = -1, u_x(\pi, t) = 1, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

↓ sol. equilíbrio: 1,0
Resolução: 2,0.

Gabrito P2 - Cálculo 4 - 2022/01 - Turma 04203

$$1) a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 3 dx + \int_0^{\pi} (-1) dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 3 \cos(mx) dx + \int_0^{\pi} (-1) \cos(mx) dx \right]$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \left[\left. \frac{3}{m} \sin(mx) \right|_{-\pi}^{-\pi/2} - \left. \frac{1}{m} \sin(mx) \right|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{\pi m} \left[3 \left(\sin(-m\pi/2) - \sin(-m\pi) \right) \right]$$

$$a_m = -\frac{3}{\pi m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 3 \sin(mx) dx + \int_0^{\pi} (-1) \sin(mx) dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\left. -\frac{3}{m} \cos(mx) \right|_{-\pi}^{-\pi/2} + \left. \frac{1}{m} \cos(mx) \right|_0^{\pi} \right]$$

$$b_m = \frac{1}{\pi m} \left[-3 \left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \cos(m\pi) \right) + \left(\cos(m\pi) - 1 \right) \right] = \frac{1}{\pi m} \left[-3 \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + 4 \cos(m\pi) - 1 \right]$$

Logo, a série de Fourier de f é dada por:

$$\frac{1}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{3}{\pi m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right) \cos(mx) + \frac{1}{\pi m} \left(-3 \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + 4 \cos(m\pi) - 1 \right) \sin(mx) \right]$$

$$= \begin{cases} 3 & \text{se } -\pi < x < -\pi/2 \\ 0 & \text{se } -\pi/2 < x < 0 \\ -1 & \text{se } 0 < x < \pi \\ \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2} & \text{se } x=0 \\ \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} & \text{se } x=-\pi/2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 & \text{se } x=\pi \text{ ou } x=-\pi \end{cases}$$

2) 2ª ordem, não linear

$$f = \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 - y^4 \cdot x^2 = \frac{y^4}{4} - y^4 \cdot x^2 = y^4 \left(\frac{1}{4} - x^2\right)$$

Se $y=0$ ou $x = \pm \frac{1}{2}$ ($x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$), EDP parabólica

Se $y \neq 0$ e $\frac{1}{4} - x^2 > 0 \Rightarrow y \neq 0$ e $x < \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow y \neq 0$ e $|x| < \frac{1}{2}$
 EDP Hiperbólica

Se $y \neq 0$ e $\frac{1}{4} - x^2 < 0 \Rightarrow y \neq 0$ e $x > \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow y \neq 0$ e $|x| > \frac{1}{2}$
 EDP elíptica.

3) $u_{xx} + u_{yy} = 0$
 $u_y(x, 0) = 0$
 $u_y(x, b) = 0$
 $u_x(a, y) = 0$
 $u(0, y) = g(y)$

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y'(0) = 0 \\ Y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) = Y'(0) \cdot X(x) = 0 &\Rightarrow Y'(0) = 0 \\ u_y(x, b) = Y'(b) \cdot X(x) = 0 &\Rightarrow Y'(b) = 0 \\ u_x(a, y) = 0 &\Rightarrow X'(a) \cdot Y(y) = 0 \\ &\Rightarrow X'(a) = 0 \end{aligned}$$

4) Sol. equilíbrio $\begin{cases} V''(x) + e^{\pi-x} = 0 \\ V(0) = -1 \\ V'(\pi) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V'' = -e^{\pi-x} \\ V = e^{\pi-x} + C_1 \end{cases}$

$$V'(\pi) = 1 \Rightarrow e^{\pi-\pi} + C_1 = 1$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$V(x) = -e^{\pi-x} + C_2$$

$$V(0) = -e^{\pi} + C_2 = -1 \Rightarrow \boxed{C_2 = e^{\pi} - 1}$$

$$\boxed{V(x) = -e^{\pi-x} + e^{\pi} - 1}$$

Seja $v(x,t) = u(x,t) - V(x)$, então

$$\begin{aligned} V_t &= u_t \\ V_{xx} &= u_{xx} - V'' \\ V_x &= u_x - V'(x) \end{aligned} \Rightarrow \text{Substituindo na EDP:}$$

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + V'' + e^{\pi-x}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(0,t) = 0, \quad v_x(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = f(x) - V(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Assim, v satisfaz

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ v(0,t) = 0, & t > 0 \\ v_x(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = f(x) - V(x) \end{cases}$$

Propondo $v(x,t) = X(x)T(t)$, Temos as duas equações:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\pi} \right)^2 = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2, n=1,2,\dots$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) = f(x) - U(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(*) \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x) - U(x)) \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx$$

Logo, $u(x,t) = v(x,t) + U(x)$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \cdot e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t} + e^{-1} - e^{\pi-x}$$

com C_n dado em (*).

$$\begin{aligned} Y'(y) + \lambda Y(y) &= 0 \\ Y'(0) = Y'(b) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0, Y_0(y) = 1 \\ \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, Y_m(y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X(x) = 0 \\ X'(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B \\ X'(a) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \boxed{X_0(x) = A_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow X''_m - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X_m = 0 \\ X_m(x) = A_m \cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) + B_m \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \\ X'_m(x) = A_m \frac{m\pi}{b} \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) + B_m \frac{m\pi}{b} \cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \\ X'_m(a) = 0 \Rightarrow A_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right) = -B_m \cosh\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \\ A_m = -B_m \cosh\left(\frac{m\pi a}{b}\right) / \sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \end{cases}$$

$$X_m(x) = B_m \left[-\cosh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \cdot \frac{\cosh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)} + \sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right) \right]$$

$$\boxed{X_m(x) = \frac{C_m}{\sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)} \cosh\left(\frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi a}{b}\right)} = \frac{C_m}{\sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right)} \cdot \cosh\left(\frac{m\pi}{b}(x-a)\right)$$

$$u(x,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \cosh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$u(0,y) = g(y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

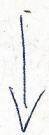
$$(*) \quad A_0 = \frac{1}{b} \int_0^b g(y) dy$$

$$\frac{C_n \cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} = \frac{2}{b} \int_0^b g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

$$C_n = \frac{2}{b} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Assim:

$$u(x,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \left(\int_0^b g(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy \right) \cdot \cosh\left(\frac{n\pi}{b}(x-a)\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$



A_0 dado por (*)