

Prova 2 - Cálculo 4 - 2023/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Encontre o raio e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

2. Considere a integral

$$\int_0^1 x \cos(x^3) dx.$$

- a. Escreva a integral na forma de uma série infinita.
- b. Quantos termos temos de considerar na série para obtermos uma aproximação para a integral com erro menor do que 10^{-3} ? Justifique sua resposta.
3. A força da gravidade em um objeto de massa m a uma altura h acima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2},$$

sendo R o raio da Terra e g a aceleração devido à gravidade.

- a. Expresse F como uma série de potências em h/R .
- b. Considere $m = 10 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $R = 6400000 \text{ m}$. Para qual faixa de valores de h podemos garantir que a aproximação $F \approx mg$ tem erro menor do que 10^{-2} ?
4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \leq x < \textcolor{red}{3}\pi/4 \\ 0 & \text{se } \textcolor{red}{-3}\pi/4 \leq x < -\pi/2 \\ 2 & \text{se } -\pi/2 \leq x \leq \pi/4 \\ 7 & \text{se } \pi/4 < x < \pi, \end{cases}$$

periódica de período $T = 2\pi$.

- a. Encontre a série de Fourier da função.
- b. Analise a convergência da série resultante para $x \in [-\pi, \pi]$.

Fórmulas:

Série Geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1$$

Teste da Razão:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Teste da Raiz:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Série de Taylor: $f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Resto de Lagrange: $R_N(x) = f^{(N+1)}(t) \frac{|x-a|^{N+1}}{(N+1)!}, a < t < x$ (ou $x < t < a$)

Série Binomial:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

Erro Série Alternada:

$$|s - s_N| < b_{N+1}$$

Algumas séries de Taylor:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Série de Fourier: $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)]$, $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Série de Fourier Cosseno: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$,

Série de Fourier Seno: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$.

Série de Fourier Seno 4L-periódica: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$.

Série de Fourier Cosseno 4L-periódica: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx$.

1. Encontre o raio e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

Teste da razão: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} (x-3)^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{2^n (x-3)^n} \right|$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+4}} \cdot 2 \cdot |x-3| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+3}{n+4}} \cdot 2 \cdot |x-3|$$

$L = 2 \cdot |x-3| \Rightarrow (L < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 1/2)$. Logo $R = 1/2$, e a série converge absolutamente no intervalo $]3 - 1/2, 3 + 1/2[=]5/2, 7/2[$.

Testando $x = 5/2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (-1/2)^n}{\sqrt{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{\sqrt{n+3}}$

Esta é uma série alternada com $b_n = \frac{2}{\sqrt{n+3}}$. Como $b_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ é decrescente, a série converge.

Testando $x = 7/2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (1/2)^n}{\sqrt{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+3}}$ que diverge, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} = 1 \text{ e a série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

Logo, o intervalo de convergência é $I =]5/2, 7/2[$.

2. Considere a integral

$$\int_0^1 x \cos(x^3) dx.$$

a. Escreva a integral na forma de uma série infinita.

b. Quantos termos temos de considerar na série para obtermos uma aproximação para a integral com erro menor do que 10^{-3} ? Justifique sua resposta.

$$a) \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} \cdot (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n} \cdot (-1)^n}{(2n)!}$$

$$x \cdot \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+1} \cdot (-1)^n}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(x^3) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{6n+1} \cdot (-1)^n}{(2n)!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n+2}}{(2n)! (6n+2)} \cdot (-1)^n \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! (6n+2)} \end{aligned}$$

b) A série é alternada com $b_n = \frac{1}{(2n)! (6n+2)}$,

como $b_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ e é decrescente, vale

$$|S - S_N| < b_{N+1} = \frac{1}{(2(N+1))! (6(N+1)+2)} < 10^{-3}, \text{ com } N=2.$$

3. A força da gravidade em um objeto de massa m a uma altura h acima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2},$$

sendo R o raio da Terra e g a aceleração devido à gravidade.

a. Expresse F como uma série de potências em h/R .

b. Considere $m = 10 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $R = 6400000 \text{ m}$. Para qual faixa de valores de h podemos garantir que a aproximação $F \approx mg$ tem erro menor do que 10^{-2} ?

$$a) F = \frac{mgR^2}{(R(1+h/R))^2} = \frac{mgR^2}{R^2(1+h/R)^2} = \frac{mg}{(1+h/R)^2}$$

Seja $x = h/R$ e $f(x) = mg \cdot (1+x)^{-2}$, então

se $|x| < 1$, usando a série binomial com $k = -2$ temos:

$$f(x) = mg \cdot \left[1 + (-2)x + \frac{(-2)(-2-1)x^2}{2!} + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)x^3}{3!} + \dots + \frac{(-2)(-2-1)\dots(-2-(n-1))x^n}{n!} + \dots \right]$$

$$f(x) = mg \cdot \left[1 - 2x + \frac{2 \cdot 3 \cdot x^2}{2!} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x^4}{4!} + \dots + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1) x^n}{n!} \cdot (-1)^n + \dots \right]$$

$$f(x) = mg \cdot \left[1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^n (n+1)x^n + \dots \right]$$

Logo, $F = mg \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{h}{R}\right)^n$ se $\frac{h}{R} < 1$

b) Note que $f'(x) = -2mg(1+x)^{-3}$, logo pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos

$$f(x) = f(0) + \left(-2mg(1+t)^{-3}\right) \cdot x, \text{ com } 0 < t < x < 1$$

ou seja,

$$f(x) = mg + \left(\frac{-2mg}{(1+t)^3}\right) \cdot x$$

e assim $f(x) \approx mg$ com erro absoluto

$$\frac{2mg}{(1+t)^3} \cdot |x| \text{ com } 0 < t < x < 1$$

Mas $0 < t < x \Rightarrow 1 < 1+t < 1+x \Rightarrow \frac{1}{(1+t)^3} < 1$

Logo $\frac{2mg}{(1+t)^3} \cdot |x| < 2mg|x|$

Assim $F \approx mg$ com $|\text{erro}| < 2mg\left(\frac{h}{R}\right)$ e portanto

$|\text{erro}| < 2 \times 10 \times 10 \times \frac{h}{6.400.000} = \frac{h}{32000} \leq 10^{-2}$ quando

$h \leq 320$, ou seja, o erro é menor do que 10^{-2} para alturas inferiores (ou iguais) a 320 metros.

4. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \leq x < -3\pi/4 \\ 0 & \text{se } -3\pi/4 \leq x < -\pi/2 \\ 2 & \text{se } -\pi/2 \leq x \leq \pi/4 \\ 7 & \text{se } \pi/4 < x < \pi, \end{cases}$$

periódica de período $T = 2\pi$.

a. Encontre a série de Fourier da função.

b. Analise a convergência da série resultante para $x \in [-\pi, \pi]$.

$$a) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-3\pi/4} dx + 2 \int_{-3\pi/4}^{-\pi/2} dx + 7 \int_{\pi/4}^{\pi} dx \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{3\pi}{4} + 7 \cdot \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 6 + 21}{4} \right) = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-3\pi/4} \cos(mx) dx + 2 \int_{-3\pi/4}^{-\pi/2} \cos(mx) dx + 7 \int_{\pi/4}^{\pi} \cos(mx) dx \right]$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left[\sin(mx) \Big|_{-\pi}^{-3\pi/4} + 2 \sin(mx) \Big|_{-3\pi/4}^{-\pi/2} + 7 \sin(mx) \Big|_{\pi/4}^{\pi} \right]$$

$$a_m = \frac{1}{\pi m} \cdot \left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4} \cdot m\right) - \cancel{\sin(-m\pi)} + 2 \left(\sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) - \cancel{\sin\left(-\frac{m\pi}{2}\right)} \right) + 7 \cdot \left(\cancel{\sin(m\pi)} - \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \right) \right]$$

$$a_m = \frac{1}{m\pi} \cdot \left[-\sin\left(\frac{3\pi m}{4}\right) - 5 \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right]$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-3\pi/4} \sin(mx) dx + 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \sin(mx) dx + 7 \int_{\pi/4}^{\pi} \sin(mx) dx \right]$$

$$b_m = -\frac{1}{m\pi} \left[\cos(mx) \Big|_{-\pi}^{-3\pi/4} + 2 \cos(mx) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/4} + 7 \cos(mx) \Big|_{\pi/4}^{\pi} \right]$$

$$b_m = -\frac{1}{m\pi} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}m\right) - \cos(-m\pi) + 2 \left(\cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{m\pi}{2}\right) \right) + 7 \left(\cos(m\pi) - \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) \right) \right]$$

$$b_m = -\frac{1}{m\pi} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}m\right) + 6\cos(m\pi) - 5\cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right]$$

Série de Fourier: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ com a_0, a_n, b_n dados acima.

b) A Série converge para:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ se } -\pi < x < -3\pi/4 \\ 0 \text{ se } -3\pi/4 < x < -\pi/2 \\ 2 \text{ se } -\pi/2 < x < \pi/4 \\ 7 \text{ se } \pi/4 < x < \pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \text{ se } x = \pi \text{ ou } x = -\pi \\ 1/2 \text{ se } x = -3\pi/4 \\ 1 \text{ se } x = -\pi/2 \\ 9/2 \text{ se } x = \pi/4 \end{array}$$