

Prova III de B- Cálculo II

Prof. Luciano Bordin

Nome:

Data:

(3,2) ① Estude a convergência (absoluta ou condicional) ou divergência de cada série abaixo:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{a} - 1), \quad a > 1$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}, \quad a > 0$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{a}{n} \right), \quad a \in \mathbb{R}$$

(1,8) ② Verifique se as séries abaixo convergem ou divergem (Escolha duas)

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(\ln(n))}$$

$$b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \left(\pi \frac{n^2}{n+1} \right)$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$$

d) $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$, onde A é o conjunto dos naturais cuja expansão decimal não contém zeros.

(20) ③ Emuncie e demonstre uma condição suficiente para q.e o produto de Cauchy de duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seja convergente.

(1,5) ④ Prove ou dê um contra-exemplo: o produto de Cauchy de duas séries divergentes é divergente.

(1,5) ⑤ Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série divergente de termos positivos e $S_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m > 1, \forall m \in \mathbb{N}$. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln(S_n)}$ diverge.



b) Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \omega\left(\frac{\pi(n-1)}{n+1} - \frac{\pi}{n+1}\right) = \omega\left(\frac{\pi(n-1)}{n+1}\right)\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \alpha_n\left(\frac{\pi(n-1)}{n+1}\right)\alpha_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

Logo, analisemos

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi(n-1)}{n+1}\right)\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$$

(Como $\sum_{k=2}^n \omega(\pi(k-1))$ é limitada (vide aula), e

$\left(\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ é decrescente para $n \geq N$, $(\ln^2 n)$

é crescente, podemos usar o teste de

Diniichlet para garantir a convergência da

série (Note que $\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n} \rightarrow 0$)

c) Como $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ é limitada

(pois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge pelo Teste de Leibniz),

e $(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ é monótona e convergente,

pelo Teste de Abel a série converge.

d) Se $m \in A$, então existe $k \in \mathbb{N}$ e $q_0, q_1, \dots, q_k \in \{1, \dots, 9\}$ tais que

$$m = q_0 \cdot 10^0 + q_1 \cdot 10^1 + \dots + q_k \cdot 10^k$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existem 9^k números da forma acima. Logo

$$\sum_{m \in A} \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{q_0, \dots, q_k \in \{1, \dots, 9\}} \frac{1}{q_k \cdot 10^k + \dots + q_0 \cdot 10^0} \right) \in \mathbb{R}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ o termo entre parêntesis é menor ou igual a $\frac{9^k}{10^k}$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k$ converge a série $\sum_{m \in A} \frac{1}{m}$ converge.

(3) Vide caderno

(4) e (5) Vide resolução da Lista.

Resolução da Prova III - B (Cálculo II):

① a) Seja $a = \frac{m}{3.5 \cdot (2m+1)}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3.5 \cdot (2n+1)(2n+3)}}{\frac{n}{3.5 \cdot (2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(2n+3)} = 0,$$

logo pelo Teste da Razão a série converge absolutamente.

b) Como $\sqrt[n]{a} > 1$ a série dada é alternada. Sabemos que $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ com $n \rightarrow +\infty$, logo

$a_n = \sqrt[n]{a} - 1 \rightarrow 0$. Mostremos que (a_n) é decrescente. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt[n+1]{a} - 1 = a^{\frac{1}{n+1}} - 1.$$

Como $a > 1$, $a^{n+1} = a^n \cdot a > a^n$. A função $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é crescente em $(0, +\infty)$ pois $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} > 0$ com $x > 0$. Logo $a^{n+1} > a^n \Rightarrow a > a^{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow a^{\frac{1}{n+1}} > a^{\frac{1}{n}}$.

Portanto $a_{n+1} < a^{\frac{1}{n}} - 1 = a_n$.

Pelo Teste de Leibniz a série converge.

Por outro lado, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$

Como $\left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^n$ é uma sequência crescente que converge para $e^{\ln a} = a$ (B-álculo I), temos

que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^n < a$$

$$\text{Assim } n \geq N \Rightarrow 1 + \frac{\ln a}{n} < a^{1/n} \Rightarrow a - 1 > \frac{\ln a}{n}$$

Como $a > 1$, $\ln a > 0$ e pelo teste de

comparação a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |\ln a|$ diverge. Assim a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente.

c) Note que

$$\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a} = \frac{e^{\ln((\ln n)^{\ln n}))}}{n^a}$$

$$= \frac{e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)}}{n^a} = \frac{e^{\ln(\ln n)}}{n^{\ln(\ln n) - a}}$$

$$= n$$

Como $\ln(\ln n) \rightarrow +\infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \ln(\ln n) > 1 + a \quad \text{Logo}$$

$$\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a} > n^{1+a-a} = n \rightarrow +\infty \quad \text{e a série}$$

diverge pois o termo geral não converge a zero.

d) Se $a=0$ a série converge absolutamente pois $\sin(0)=0$.

Suponha $a > 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow 0 < \frac{a}{n} \leq \pi/2. \text{ Isso significa que}$$

a sequência $\left(\sin\left(\frac{a}{n}\right) \right)_{n \geq N}$ é decrescente.

Obviamente $\sin\left(\frac{a}{n}\right) \rightarrow 0$ pois $\frac{a}{n} \rightarrow 0$ e

$$\sin(x) \rightarrow 0 \text{ com } x \rightarrow 0.$$

Também $S_n = \sum_{k=N}^n (-1)^k$, $n \geq N$, (S_n) é limitada

pois assume o valor 0, 1 ou -1.

Pelo Teste de Dirichlet a série converge.

$$\begin{aligned} \text{Se } a < 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{a}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{(-1)(-a)}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{-a}{n}\right) \text{ e a série converge pois} \\ &-a > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Agora, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \sin\left(\frac{a}{n}\right) \right|}{\frac{a}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n}} = 1 \text{ se } a \neq 0.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, pelo teste da comparação por limite, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{a}{n}\right) \right|$ diverge.

Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{a}{n}\right)$ converge condicionalmente.

(2) a) Note que $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\sin(m + m^{-1}) = \sin m \cos m^{-1} + \cos m \sin m^{-1}.$$

Analisemos $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n \cos n^{-1}}{\ln(\ln n)}$. Provamos em aula

que $S_n = \sum_{k=2}^n \sin(k)$ é uma seq. limitada.

Como $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ é decrescente se n é suficientemente grande e $\ln(\ln(n+1)) > \ln(\ln(n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

temos que $\left(\frac{\cos n^{-1}}{\ln(\ln n)}\right)$ decresce. Também

$$\left| \frac{\cos n^{-1}}{\ln(\ln n)} \right| \leq \frac{1}{\ln(\ln n)} \rightarrow 0, \text{ Logo pelo teste de}$$

Dirichlet a série converge.

Exatamente a mesma análise pode ser feita para a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n^{-1} \cos n}{\ln(\ln n)}$, a qual é

convergente.