

Prova III - Cálculo E - 2013/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Justifique sua resposta de forma precisa, respostas sem justificativa e/ou cálculos não serão aceitas.**

2,0

1. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^5 + 1 = 0$.

2. Represente graficamente cada região abaixo

4,5

a. D é a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C}, z = c + iy\}$ pela transformação $f(z) = i \cdot z^2$, $c \in \mathbb{R}$ é uma constante não nula.

1,5

b. D é a imagem do conjunto $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ pela transformação $f(z) = \exp(z)$.

1,5

3. Encontre os pontos $z \in \mathbb{C}$ em que existe $f'(z)$, sendo $f(z) = (z + \operatorname{Re}(z)) \cdot \operatorname{Im}(z)$. Podemos afirmar que f é holomorfa em alguma região aberta U do plano complexo?

3,5

4. Resolva o seguinte sistema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + e^x - \sin(x), \quad 0 < x < 2\pi, t > 0$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 2\pi.$$

Fórmulas:

- $w^{1/n} = |w|^{1/n} (\cos(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n})), k = 0, 1, \dots, n-1$

- $\exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y);$

- Equações de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y, v_x = -u_y$

- Série de Fourier Cosseno: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}), a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx,$

- Série de Fourier Seno: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}), b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$

- Problema de Sturm-Liouville:

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \quad 0 < x < L \\ X(0) &= X(L) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin(n\pi x/L), \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

Resolução PIII - Cálculo E, 2013-1

① $z = -1 = 1 \cdot \text{cis}(\pi)$

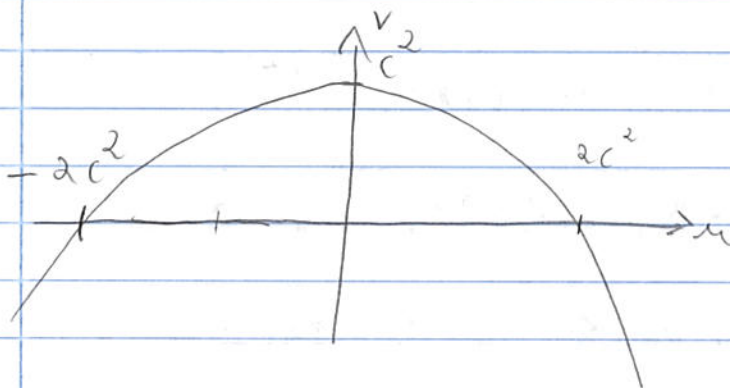
$$z_k = \text{cis}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

2) a) $f(x+iy) = i \cdot (x+iy)^2 = i [x^2 - y^2 + 2xyi]$
 $= -2xy + i(x^2 - y^2)$

$$u(x,y) = -2xy \quad v(x,y) = x^2 - y^2$$

$$x=c \Rightarrow u(x,y) = -2c \cdot y, \quad v(x,y) = c^2 - y^2$$

$$y = \frac{-u}{2c} \Rightarrow v = c^2 - \frac{u^2}{4c^2} = -\frac{1}{4c^2} u^2 + c^2$$



$$b) f(x+iy) = e^x (\cos y + i \sin y) e^x$$

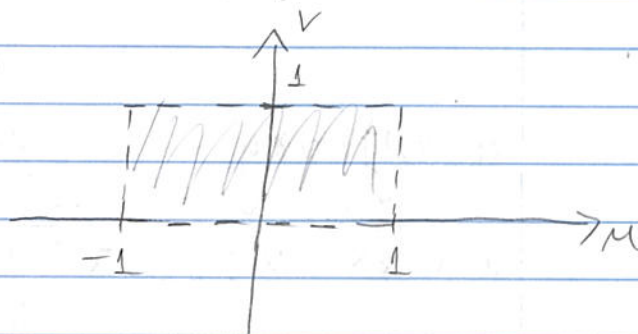
$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

$$0 < \operatorname{Im} z < \pi \Rightarrow 0 < y < \pi \Rightarrow \begin{cases} -1 < \cos y < 1 \\ 0 < \sin y < 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Re} z < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 1$$

$$\begin{aligned} -1 < -e^x < e^x \cos y < e^x < 1 &\Rightarrow -1 < u < 1 \\ 0 < e^x \sin y < e^x < 1 &\Rightarrow 0 < v < 1 \end{aligned}$$

A imagem é a região



$$3) f(x+iy) = (x+iy+x) \cdot y = 2xy + i \cdot y^2$$

$$u(x,y) = 2xy, \quad v(x,y) = y^2$$

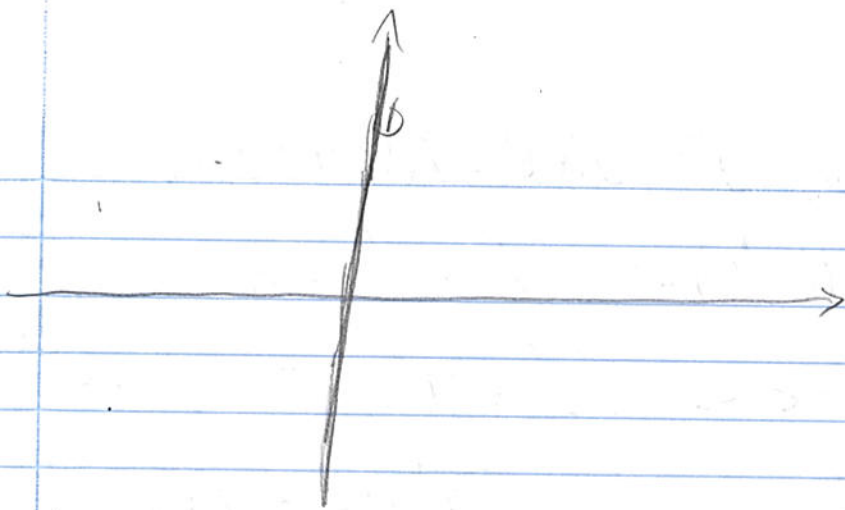
$$u_x = 2y, \quad u_y = 2x, \quad v_y = 2y, \quad v_x = 0$$

$\leadsto u, u_x, u_y, v, v_x, v_y$ são contínuas em todo o $\mathbb{R}^2$

$$\leadsto u_x = v_y, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad u_y = -v_x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$f'(z_0)$ existe somente quando $z_0 = iy, \forall y \in \mathbb{R}$,

ou seja, quando z_0 pertence à região D :



Como D não é aberta, f não é holomorfa em nenhuma região aberta do plano.

$$4) \quad \gamma''(x) + e^x - \sin(x) = 0 \Rightarrow \gamma'(x) = -e^x - \cos(x) + C_1$$

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 0$$

$$\gamma(x) = -e^x - \sin(x) + C_1 x + C_2$$

$$\gamma(0) = 0 = -1 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = +1}$$

$$\gamma(2\pi) = 0 \Rightarrow 0 = -e^{2\pi} + C_1 \cdot 2\pi + 1 \Rightarrow C_1 = \frac{-1 + e^{2\pi}}{2\pi}$$

$$\boxed{\gamma(x) = -e^x - \sin(x) + \left(\frac{-1 + e^{2\pi}}{2\pi} \right) x + 1}$$

Seja $U(x,t) = u(x,t) - \gamma(x)$, então U satisfaz:

$$\begin{cases} U_{tt} = U_{xx}, & 0 < x < 2\pi, t > 0 \\ U(0,t) = U(2\pi,t) = 0, & t > 0 \\ U(x,0) = -\gamma(x), & 0 < x < 2\pi \\ U_t(x,0) = g(x), & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Resolvendo para $()$: $V(x,t) = X(x)T(t)$;

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 2\pi \\ X(0) = X(2\pi) = 0 \end{array} \right.$$

$$X(0) = X(2\pi) = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{(2\pi)^2} = \frac{m^2}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T'' + \lambda T = 0, \quad t > 0 \\ T_m''(t) + \frac{m^2}{4} T_m(t) = 0 \end{array} \right.$$

$$T_m''(t) + \frac{m^2}{4} T_m(t) = 0$$

$$\hookrightarrow T_m(t) = a_m \cos\left(\frac{m}{2}t\right) + b_m \sin\left(\frac{m}{2}t\right)$$

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{2\pi}\right) = \sin\left(\frac{mx}{2}\right)$$

$$V(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{mx}{2}\right) \left[a_m \cos\left(\frac{mt}{2}\right) + b_m \sin\left(\frac{mt}{2}\right) \right]$$

$$V(x,0) = -\gamma(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{mx}{2}\right) \cdot a_m \Rightarrow a_m = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\gamma(x)) \cdot \sin\left(\frac{mx}{2}\right) dx$$

$$V_t(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{mx}{2}\right) \left[-a_m \frac{m}{2} \sin\left(\frac{mt}{2}\right) + b_m \frac{m}{2} \cos\left(\frac{mt}{2}\right) \right] \left\{ \begin{array}{l} a_m = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(x) \cdot \sin\left(\frac{mx}{2}\right) dx \end{array} \right.$$

$$V_t(x,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \cdot \frac{m}{2} \sin\left(\frac{mx}{2}\right) = g(x)$$

$$b_m \cdot \frac{m}{2} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin\left(\frac{mx}{2}\right) dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_m = \frac{2}{\pi m} \int_0^{2\pi} g(x) \sin\left(\frac{mx}{2}\right) dx \end{array} \right.$$

$$\underline{R.:} \quad u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{mx}{2}\right) \left[\frac{-1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\xi) \sin\left(\frac{m\xi}{2}\right) d\xi \cos\left(\frac{mt}{2}\right) + \frac{2}{\pi m} \int_0^{2\pi} g(\xi) \sin\left(\frac{m\xi}{2}\right) d\xi \sin\left(\frac{mt}{2}\right) \right]$$

$$= e^{-x} \sin(x) + \left(\frac{1+e^{2\pi}}{2\pi} \right) x + 1$$