

MTM5118 Cálculo IV- Prova 3- 2019/01

Nome:

1. Calcule as seguintes integrais:

1,5

a. $\int_C \frac{e^{1/z}}{z} dz$, sendo C a fronteira do quadrado de lado 1 e lados paralelos aos eixos, com centro na origem e orientado no sentido anti-horário.

2,5

b. $\int_C \frac{(z-\pi/2)^2(z-\pi)}{\cos^3(z)\sin^2(z)} dz$, sendo C a circunferência $\phi(\theta) = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ com raio r satisfazendo $\pi < r < \frac{3\pi}{2}$.

2,5

2. Encontre a representação em série de Laurent para a função $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ válida na região $1 < |z| < 2$.

3. A seguinte observação foi adaptada de um comentário que aparece no livro *Lectures in Physics* de R. P. Feynman:

Assim, a energia média é dada por

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega(0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots)}{1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots} \quad (1)$$

2,5

Manipulando adequadamente a expressão acima, sendo $x = e^{-\hbar\omega/KT}$, obtemos a primeira fórmula conhecida da mecânica quântica:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/KT} - 1} \quad (2)$$

Sendo $\hbar, \omega, K, T$ constantes positivas e $x = e^{-\hbar\omega/KT}$, mostre que as séries (numerador e denominador) em (1) são convergentes e que (2) pode ser obtida a partir de (1).

4. Encontre uma aproximação para a integral

2,5

$$\int_0^{4/5} \sqrt[3]{1+x^3} dx$$

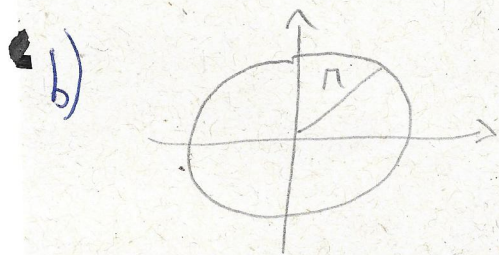
com erro absoluto menor do que 10^{-6} .

Resolução - P3- 2019/01 - Turma dia

$$1) a) \frac{e^{1/2}}{z} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} + \dots$$

$$\text{Res}(f, 0) = 1; \quad \int_C \frac{e^{1/2}}{z} dz = 2\pi i$$



$$\pi < n < 3\pi/2$$

Singularidades: $z_0 = 0$

$$z_1 = \pi, \quad z_2 = -\pi$$

$$z_3 = \pi/2, \quad z_4 = -\pi/2$$

$\rightarrow z_0 = 0$, polo de ordem 2

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 f(z) \right] = \frac{5\pi}{4}$$

$\rightarrow z_1 = \pi$, polo simples

$$\text{Res}(f, \pi) = \lim_{z \rightarrow \pi} \left(\frac{(z-\pi)^2}{\sin^2(z)} \right) \cdot \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{(z-\pi/2)^2}{\cos^3(z)} = -\frac{\pi^2}{4}$$

$\rightarrow z_2 = -\pi$, polo de ordem 2

$$\text{Res}(f, -\pi) = \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{d}{dz} \left[(z+\pi)^2 f(z) \right] = -\frac{3\pi^2}{4}$$

$\rightarrow z_3 = \pi/2$, polo simples

$$\text{Res}(f, \pi/2) = \lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{(z-\pi/2)^3}{\cos^3(z)} \cdot \lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{(z-\pi)}{\sin^2(z)} = \frac{\pi}{2}$$

$\rightarrow z_4 = -\pi/2$, polo de ordem 3

$$\text{Res}(f, -\pi/2) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -\pi/2} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+\pi/2)^3 f(z) \right] = -\frac{1}{4} \pi (14 + 9\pi)$$

Logo: $\int_C f(z) dz = 2\pi i \left[\frac{-1\pi(19+9\pi^2)}{4} + \frac{\pi}{2} - 33\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{5\pi^2}{4} \right]$

(2) $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+2}$

$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{9}, C = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{z-1}\right)^2 = -\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\left[-z^{-2} - 2z^{-3} \dots - n z^{-n-1} + \dots\right]$
 $= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \dots + \frac{n}{z^{n+1}} + \dots$

$\Rightarrow \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^{n-1}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{2^n}$

Logo:

$\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{z^{n+1}} - \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{2^n}$

$1 < |z| < 2$

(3) Série do numerador: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ tem não de convergência $R=1$, pois, pelo teste da razão. $\frac{h\nu}{kT}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} \right| = |x| < 1$$
. Logo, como $0 < x = e^{-\frac{h\nu}{kT}} < 1$, a série converge.

Série do denominador: $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ que é uma série geométrica convergente, pois $0 < x = e^{-\frac{h\nu}{kT}} < 1$.

Agora, $1 + x + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$, logo

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu \cdot (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots)}{\left(\frac{1}{1-x} \right)}$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= h\nu (x-1)(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots) \\ &= h\nu (x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + nx^{n+1} - x - 2x^2 - 3x^3 - 4x^4 - \dots - nx^n) \\ &= h\nu (-x - x^2 - x^3 - x^4 - \dots - x^n) \end{aligned}$$

$$= + h\nu x (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots) = - h\nu x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= + h\nu \frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = + h\nu \cdot \frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

(4) $k = \frac{4}{3}$,

$$(1+x^3)^{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot (+x^3) + \frac{\frac{4}{3} \cdot (\frac{4}{3}-1)}{2} \cdot \frac{(+x^3)^2}{2} + \frac{\frac{4}{3}(\frac{4}{3}-1)(\frac{4}{3}-2)}{3!} \cdot \frac{(+x^3)^3}{3!} + \frac{\frac{4}{3}(\frac{4}{3}-1)(\frac{4}{3}-2)(\frac{4}{3}-3)}{4!} \cdot \frac{(+x^3)^4}{4!} + \dots + \frac{\frac{4}{3}(\frac{4}{3}-1)(\frac{4}{3}-2)\dots(\frac{4}{3}-(m-1))}{m!} \cdot \frac{(+x^3)^m}{m!}$$

$$(1+x^3)^{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1 \cdot 2}{3^2} \cdot \frac{1}{2!}x^6 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3} \cdot \frac{1}{3!}x^9 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4} \cdot \frac{1}{4!}x^{12} + \dots + (-1)^m \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3m-4)}{3^m} \cdot \frac{1}{m!}x^{3m} + \dots$$

$$\int_0^{\frac{4}{5}} \sqrt[4]{1+x^3} dx = x \Big|_0^{\frac{4}{5}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\frac{4}{5}} + \dots + (-1)^m \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots (3m-4)}{3^m} \cdot \frac{x^{3m+1}}{m!(3m+1)} \Big|_0^{\frac{4}{5}}$$

$$\int_0^{\frac{4}{5}} \sqrt[4]{1+x^3} dx = \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \sum_{m=2}^{+\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots (3m-4)}{3^m m!(3m+1)} \left(\frac{4}{5}\right)^{3m+1} + \dots$$

Pelo teste de Leibnitz:

$$|S - S_N| \leq L_{N+1}, \quad |S - S_N| \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \dots (3N-4)}{3^{N+1} (N+1)! (3N+4)} \left(\frac{4}{5}\right)^{3N+4} < 10^{-6}$$

quando $N=8$

Logo $S \approx S_N$ com erro absoluto menor que 10^{-6}