

Cálculo IV- Prova de Recuperação

Nome:

1. A equação de Legendre de ordem α é dada por

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \alpha(1 + \alpha)y(x) = 0,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Mostre que $x_0 = \pm 1$ são pontos singulares regulares dessa equação.
 - Determine a equação indicial e suas raízes para $x_0 = 1$.
 - Encontre **uma** solução dessa equação no intervalo $(1, 3)$.
2. Suponha que u é o potencial eletrostático no interior de um disco de raio 1 que não contém cargas no seu interior e tal que o potencial sobre a fronteira do círculo (ou seja, quando $r = 1$) é dado por $u(\theta) = -1$, se $-\pi < \theta < 0$ e $u(\theta) = 1$ se $0 < \theta < \pi$. Mostre que $u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \left(r \sin \theta + \frac{1}{3} r^3 \sin 3\theta + \frac{1}{5} r^5 \sin 5\theta + \dots \right)$.
3. Uma barra fina e de comprimento L está disposta ao longo do eixo x . O lado esquerdo da barra corresponde a $x = 0$ e o lado direito a $x = L$. Suponha que, no tempo $t = 0$, a temperatura da barra é dada por uma função $f(x)$ que é diferenciável em $[0, L]$. Admita também que o lado direito (em $x = L$) e esquerdo (em $x = 0$) da barra são mantidos termicamente isolados. Encontre a distribuição de temperatura na barra para todo $t > 0$, supondo que $\alpha = 1$ e que a barra satisfaz todas as hipóteses físicas que permitem a utilização da equação do calor.
4. Seja $F(z) = \frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)}$, achar a série de Laurent de $F(z)$ ao redor de $z_0 = 1$ convergente para $(1/2) < |z - 1| < 1$.
5. Para cada função f e caminho C , calcule $\int_C f(z) dz$:
- $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(4+z^2)}$, C é o quadrado de lado 3 e lados paralelos aos eixos, com centro em $-2i$, orientado no sentido anti-horário.
 - $f(z) = ze^{-1/z^2}$, C é a circunferência $|z| = 1$, orientada no sentido anti-horário.
 - $f(z) = \frac{(1-e^{2z})\tan(z)}{z^4}$, C é a circunferência $|z| = \pi$, orientada no sentido anti-horário.
 - $f(z) = z^{-1} \operatorname{cosec} z$, C é a circunferência $|z - \pi/2| = \pi/4$, orientada no sentido anti-horário.

$$(2) \mu(n, \theta) = R(n) \Theta(\theta)$$

$$\mu_{nn} + n^{-1} \mu_n + n^{-2} \mu_{\theta\theta} = 0, \quad \mu(1, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi < \theta < 0 \\ 1 & \text{if } 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

$$(R'' + n^{-1} R') \Theta + n^{-2} \Theta'' R = 0$$

$$- \frac{R'' + n^{-1} R'}{n^{-2} R} = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0, & -\pi < \theta < \pi \\ \Theta(\pi) = \Theta(-\pi) \\ \Theta'(\pi) = \Theta'(-\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} R'' + n^{-1} R' - \lambda n^{-2} R = 0, \quad n\pi \\ \lim_{n \rightarrow 0^+} R(n) \text{ exists} \end{cases}$$

$$\lambda = 0, \quad \Theta''(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = a\theta + b$$

$$\Theta(\pi) = a\pi + b = -a\pi + b = \Theta(-\pi)$$

$$2a\pi = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$\Theta'(\pi) = a = \Theta'(-\pi)$$

$$\text{A.H. } \lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{\Theta_0(\theta) = 1}$$

$$\lambda < 0, \quad \Theta''(\theta) - k^2 \Theta(\theta) = 0, \quad k \neq 0$$

$$\Theta(\theta) = a e^{k\theta} + b e^{-k\theta}$$

$$\Theta(\pi) = a e^{k\pi} + b e^{-k\pi} = a e^{-k\pi} + b e^{k\pi}$$

$$\Theta'(\pi) = k e^{k\pi} \cdot a - b k e^{-k\pi} = k e^{-k\pi} a - b k e^{k\pi} = \Theta'(-\pi)$$

$$a e^{k\pi} - b e^{-k\pi} = a e^{-k\pi} - b e^{k\pi}$$

$$2a e^{k\pi} = 2a e^{-k\pi} \Rightarrow a [\sinh(k\pi)] = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$$

$$b \sinh(k\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

So l. Trivial.

$$\lambda > 0, \lambda = k^2, k > 0$$

$$\Theta(\theta) = c \cos(k\theta) + d \sin(k\theta)$$

$$\Theta(\pi) = c \cos(k\pi) + d \sin(k\pi) = c \cos(-k\pi) + d \sin(-k\pi) = \Theta(-\pi)$$

$$2d \sin(k\pi) = 0$$

$$\Theta'(\pi) = -kc \sin(k\pi) + kd \cos(k\pi) = -kc \sin(-k\pi) + kd \cos(-k\pi)$$

$$2d \sin(k\pi) = 0 \Rightarrow k\pi = m\pi, m = 1, 2, \dots$$

$$\text{Autofunção: } \Theta_m(\theta) = c_m \cos(m\theta) + d_m \sin(m\theta) \quad \boxed{k=m} \Rightarrow \boxed{\lambda_m = m^2}$$

$$R''(n) + n^{-1} R'(n) - \lambda n^{-2} R = 0 \Rightarrow n^2 R'' + n R' - \lambda R = 0$$

$$\text{Eq. Característica: } \alpha^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = m \\ \alpha_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{Se } m=0 \Rightarrow R_0(n) = a_0 n^0 + b_0 n^0 \ln(n) = a_0 + b_0 \ln(n)$$

Como queremos $R_0(n)$ finita quando $n \rightarrow 0^+$, tomamos $b_0 = 0$ para obter $\boxed{R_0(n) = a_0}$

$$\text{Se } m=1, 2, \dots, R_m(n) = a_m n^m + b_m n^{-m} \text{ e tomamos } b_m = 0$$

$$\boxed{R_m(n) = a_m n^m}$$

$$\text{Sol. final: } u(n, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m n^m [c_m \cos(m\theta) + d_m \sin(m\theta)]$$

$$f(\theta) = u(1, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m c_m \cos(m\theta) + b_m d_m \sin(m\theta)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n' \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta + b_n' \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) d\theta \right]$$

$$\int_{-\pi}^0 -d\theta + \int_0^{\pi} d\theta = -\pi + \pi = 0 = a_0' \cdot 2\pi + \frac{a_n'}{n} \sin(n\theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{b_n}{n} (\cos(n\theta)) \Big|_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow \boxed{a_0' = 0}$$

$n=1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n' \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta + b_n' \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \right]$$

$$\int_{-\pi}^0 \cos(m\theta) d\theta + \int_0^{\pi} \cos(m\theta) d\theta = a_m' \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(m\theta) d\theta$$

$$\boxed{a_m' = 0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(m\theta) d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\theta) b_n' \sin(n\theta) d\theta \right]$$

$$-\int_{-\pi}^0 \sin(m\theta) d\theta + \int_0^{\pi} \sin(m\theta) d\theta = b_m' \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(m\theta) d\theta$$

$$+\frac{1}{m} (\cos(m\theta)) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{m} (\cos(m\theta)) \Big|_0^{\pi} = b_m' \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$+\frac{1}{m} [1 - \cos(-m\pi)] - \frac{1}{m} [\cos(m\pi) - 1] = \frac{1}{\pi} b_m'$$

$$\frac{2}{m} - \frac{2}{m} \cos(m\pi) = \frac{1}{\pi} b_m'$$

Se m é par $b_m' = 0$, se m é ímpar

$$b_m' = \frac{4}{m\pi}$$

$$\text{Logo } \mu(\pi, 0) = \frac{4}{\pi} \left[\pi \sec(0) + \frac{1}{3} \pi^3 \sec(30) + \frac{1}{5} \pi^5 \sec(50) + \dots \right]$$

$$③ \quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0$$

$$\bullet \lambda = 0 \quad X(x) = ax + b = 0 \Rightarrow X'(0) = X'(L) = a = 0 \Rightarrow \boxed{X_0(x) = 1}$$

$$\bullet \lambda < 0, \quad X(x) = 0$$

$$\bullet \lambda > 0, \quad \begin{aligned} X(x) &= a \cos(kx) + b \sin(kx) \\ X'(x) &= -ka \sin(kx) + bk \cos(kx) \end{aligned}$$

$$X'(0) = b k = 0 \Rightarrow b = 0, \quad X(L) = -ka \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\boxed{X_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2}, \quad m = 1, 2, \dots}$$

$$\boxed{X_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}$$

$$\bullet T_0'(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = a_0$$

$$\bullet T_m'(t) + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} T_m(t) = 0 \Rightarrow T_m(t) = a_m e^{-\frac{m^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x) \Rightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) f(s) ds$$

$$u(x,t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(s) ds + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \left(\int_0^L f(s) ds \right) \cos\left(\frac{n\pi s}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

$$(4) \quad \frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2) + B(2z-1)}{(z-2)(2z-1)}$$

$$z=2 \Rightarrow 3 \cdot 2 - 3 = B \cdot (2 \cdot 2 - 1) \Rightarrow 3B = 3 \Rightarrow \boxed{B=1}$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 = A \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

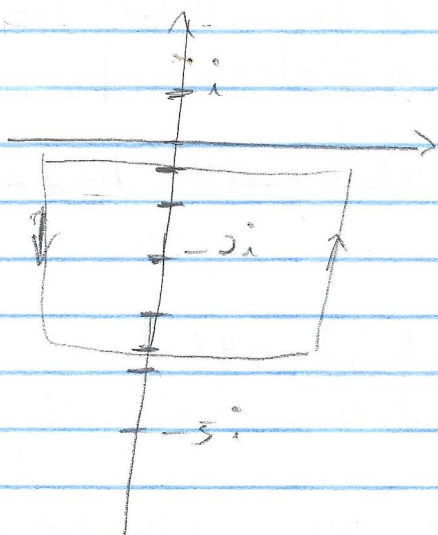
$$6 \quad \frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2(z-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2(z-\frac{1}{2})+1} = \frac{1}{2(z-1)} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2(z-1)} \right]}$$

$$= \frac{1}{2(z-1)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n (z-1)^n} \quad \text{pois } \frac{1}{2} < 1$$

$$\bullet \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-2)-1} = \frac{-1}{1-(z-2)} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n$$

$$\text{Log.} \quad \frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)} = - \sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1} (z-1)^{n+1}}$$

(5) a)



Singularit des: $z_0 = -2i$

$$\int_C \frac{\sin z}{z+2i} dz = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{(-2i)^2 - 4i^2}$$

$$= -\pi \sin(2i)$$

b) Singularidade: $z_0 = 0$

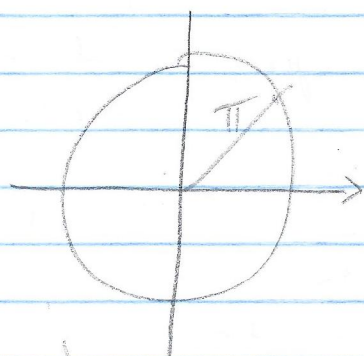
$$ze^{-1/z^2} = z \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = z \left[1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \dots \right]$$

$$= z - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \dots$$

$$\text{Res}(f, 0) = -1$$

$$\int_C ze^{-1/z^2} dz = -2\pi i$$

c)



Singularidades: $z_0 = 0$, $z_1 = \pi/2$ e $z_2 = -\pi/2$

$$f(z) = \frac{(1 - e^{2z}) \sin z}{\cos z \cdot z^4} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

Para $z_0 = 0$, $g(0) = 0$, $g'(z) = \cos z (1 - e^{2z}) - 2e^{2z} \sin z$
 $g'(0) = 0$

$$g''(z) = -\sin z (1 - e^{2z}) - 2e^{2z} \cos z - 4e^{2z} \sin z - 2e^{2z} \cos z$$

$$g''(0) = -4 \neq 0$$

$z_0 = 0$ é zero de ordem 2 para g

$z_0 = 0$ é zero de ordem 4 para h

Logo $z_0 = 0$ é polo de ordem 2 para f .

Como $h(\pi/2) = 0$ e $h'(\pi/2) \neq 0$, $z_1 = \pi/2$ é zero de orden 1 por h . Como $g(\pi/2) \neq 0$, f tem um polo de orden 1 em $z_1 = \pi/2$. Idem p/ $z_2 = -\pi/2$.

$$\text{Res}(f, \pi/2) = \lim_{z \rightarrow \pi/2} (z - \pi/2) \frac{(1 - e^{2z}) \sec z}{-\sec(z - \pi/2) z^4} = \frac{-(1 - e^\pi)}{(\pi/2)^4} = -\frac{2^4(1 - e^\pi)}{\pi^4}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, -\pi/2) &= \lim_{z \rightarrow -\pi/2} (z + \pi/2) \frac{(1 - e^{2z}) \sec z}{\sec(z + \pi/2) z^4} = \frac{-(1 - e^{-\pi})}{(-\pi/2)^4} (-1) \\ &= (e^{-\pi} - 1) \cdot \frac{2^4}{\pi^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2z} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2z)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m z^m}{m!} = 1 + 2z + \frac{4z^2}{2} + \frac{8z^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + 2z + 2z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{16}{4!}z^4 + \frac{32}{5!}z^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\sec z = 1 - z + \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots$$

$$(1 - e^{2z}) \sec z = \left(-2z - 2z^2 - \frac{4}{3}z^3 \right) \left(1 - z + \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} &= -2z + z^2 [2 - 2] + z^3 \left[2 - \frac{4}{3} \right] + z^4 \left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right] \\ &+ z^5 \left[-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{32}{120} \right] + \dots = -2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{5}{3}z^4 + \frac{19}{15}z^5 + \dots \end{aligned}$$

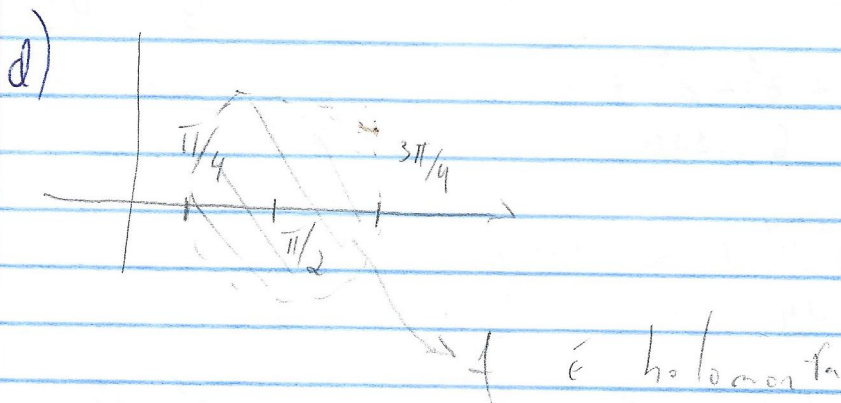
$$\begin{array}{r}
 -2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{5}{3}z^4 + \frac{19}{15}z^5 + \dots \quad \left| \frac{1 - z^2 + \frac{z^4}{4}}{2} \right. \\
 + 2z - z^3 - \frac{z^5}{2} + \dots \\
 \hline
 -\frac{1}{3}z^3 + \frac{5}{3}z^4 + \left(\frac{19}{15} - \frac{1}{2}\right)z^5 + \dots
 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \frac{(1 - e^{2z}) \sec z}{\cos z} = -\frac{2}{z^3} - \frac{1}{3z} + \dots$$

$$\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{3}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \int_C f(z) dz &= 2\pi i \left[-\frac{1}{3} + \frac{2^4}{\pi^4} (\bar{e}^{-\pi} - 1 - 1 + e^{\pi}) \right] \\
 &= 2\pi i \left(-\frac{1}{3} + \frac{16}{\pi^4} (\bar{e}^{-\pi} + e^{\pi} - 2) \right)
 \end{aligned}$$



$$\int_C \frac{-1}{z} \cos z dz = 0$$