

Recuperação - Cálculo D - 2012/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

Responda a todas as questões abaixo. **Justifique sua resposta de forma precisa, respostas sem justificativa e/ou cálculos não serão aceitas.**

1. Classifique cada série abaixo em divergente, condicionalmente convergente ou absolutamente convergente.

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{(n+2)!}$

2. Para quais valores de x podemos usar a aproximação $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ de forma que o erro cometido seja menor do que 0.001?

3. Resolva o problema abaixo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + g(t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

4. Calcule as integrais

a. $\int_C \frac{z \exp(z)}{z^4 - 1} dz$, onde C é a circunferência $|z + i| = 1$ orientada no sentido anti-horário.

b. $\int_C \frac{\bar{z}-1}{(z-1)^2} dz$, onde C é a circunferência $|z - 1| = 2$ orientada no sentido anti-horário

5. Um fluido bidimensional e estacionário tem como potencial complexo $\Omega(z) = i \operatorname{Log}(z)$ na região $\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\}$. Encontre a velocidade complexa e caracterize graficamente a dinâmica do fluido.

Fórmulas: Série de Taylor: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

Desigualdade de Taylor: $|r_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, $|x-a| \leq d$.

Série de Fourier: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)]$, $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Série de Fourier Cosseno: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Série de Fourier Seno: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$.

Prof. Luciano Bedin

① a) Seja $b_n = \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$, então se $n \geq 3$,

$b_n > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} = 0$, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Além disso, $b_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \ln(\ln(n+1))} < b_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

para todo $n \geq 3$. Podemos então aplicar o teste de Leibniz para séries alternadas e concluir que a série converge.

Por outro lado, seja $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln(x))}$, então f é contínua, decrescente

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Podemos utilizar o teste da integral

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln(\ln x)) \Big|_3^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(\ln(\ln b)) - \ln(\ln(\ln 3))] = +\infty \end{aligned}$$

De fato, $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(\ln(\ln x)) + C$

$\downarrow$
 u
 $du = \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \frac{1}{x \ln x} dx$

Logo a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ diverge e a série dada converge condicionalmente.

b) Usando o teste da razão.

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}{(n+3)!}}{\frac{n! \cdot 2^n}{(n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+3)!} \cdot \frac{2 \cdot (n+2)!}{n!}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)! \cancel{(n+2)!}}{(n+3) \cancel{(n+2)!} n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1) \cancel{n!}}{(n+3) \cancel{n!}} = 2 > 1, \text{ logo}$$

a série diverge.

$$(2) \text{ Como } \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

temos uma série alternada. Podemos escrever

$$\cos x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n \quad \text{com } b_n = \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}.$$

(3) Como queremos ao usarmos os n primeiros termos.

$$|S_n - S| \leq b_{n+1} = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{Para } n=2 \text{ temos } |S_2 - S| \leq \frac{x^4}{4!} < 0,001 \Rightarrow x^4 < 24 \cdot 0,001 \\ x^4 < 0,024$$

$$\text{Assim devemos ter } |x| < \sqrt[4]{0,024}.$$

3) Propomha $u(x,t) = U(x,t) + F(t)$ então

$$u_t(x,t) = U_t(x,t) + F'(t)$$

$$u_x(x,t) = U_x(x,t), \quad u_{xx}(x,t) = U_{xx}(x,t).$$

Substituindo na equação temos

$$\begin{cases} U_t(x,t) + F'(t) = U_{xx}(x,t) + g(t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ U_x(0,t) = U_x(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ (U(x,0) + F(0)) = 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Seja $F(t)$ satisfazendo

$$\begin{cases} F'(t) = g(t), & t > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^t F'(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

$$F(t) - F(0) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

$$F(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

A equação para U é:

$$\begin{cases} U_t(x,t) = U_{xx}(x,t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ U_x(0,t) = U_x(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ U(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Propomdo $U(x,t) = X(x)T(t)$ temos:

(4)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$X'(0)T(t) = X'(L)T(t) = 0$$

$$X(x)T'(0) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0 \quad \begin{cases} T' + \lambda T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = 0$ temos $\begin{cases} X'' = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} X(x) &= ax + b \\ X'(x) &= a \Rightarrow a = X'(0) = X'(L) = 0 \end{aligned}$

Logo $X(x) = b \neq 0$ é autovalor

Para $\lambda < 0$ não temos autovalores.

Para $\lambda > 0$ temos autovalores $\lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} = m^2, \quad m = 1, 2, \dots$

e autofunções $X_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) = \cos(mx)$

Resolvendo para T : $\begin{cases} T_0' + 0 T_0 = 0 \\ T_0(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow T_0' = 0 \Rightarrow T_0(t) = C$

$$T_0(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Logo $T_0(t) = 0$

$$\begin{cases} T_m' + m^2 T_m = 0 \\ T_m(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow e^{m^2 t} [T_m' + m^2 T_m] = 0$$

$$\frac{d}{dt} [e^{m^2 t} T_m(t)] = 0$$

$$T_m(t) = C \cdot e^{-m^2 t}$$

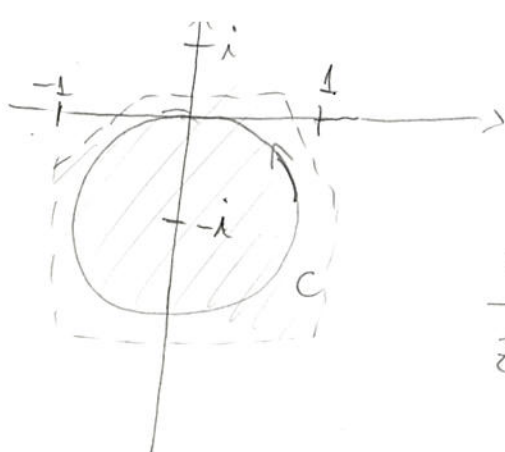
$$T_m(0) = C = 0 \Rightarrow T_m(t) = 0$$

Assim, $U(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m(x) T_m(t) = 0$

e a solução final do problema

$$u(x,t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

4) a)



$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z^2 - 1)(z + i)(z - i)$$

$$\frac{z \exp(z)}{z^4 - 1} = \frac{\boxed{\frac{z \exp(z)}{(z^2 - 1)(z - i)}}}{(z + i)} \rightarrow f(z)$$

5

f é holomorfa na região simplesmente conexa acima

$$\begin{aligned} \text{logo } \int_C \frac{z \exp(z)}{z^4 - 1} dz &= 2\pi i f(-i) = 2\pi i \cdot \frac{(-i) \exp(-i)}{((-i)^2 - 1)(-i - i)} \\ &= \frac{2\pi i \cdot (-i) \exp(-i)}{-2 \cdot -2i} \\ &= \frac{-\pi i \exp(-i)}{2} \end{aligned}$$

b) Seja $z = 2e^{it} + 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$, logo

$$\int_C \frac{\bar{z} - 1}{(z - 1)^2} dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\overline{2e^{it} + 1} - 1}{(2e^{it})^2} \right) \cdot 2i e^{it} dt$$

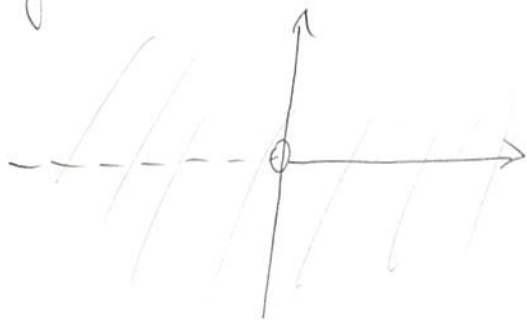
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2e^{-it} + 1 - 1}{4e^{2it}} \right) \cdot 2i e^{it} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4i}{4e^{2it}} dt = \int_0^{2\pi} i e^{-2it} dt = -\frac{1}{2} e^{-2it} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[e^{-4\pi i} - 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} [1 - 1] = 0$$

5) $\Omega(z) = i \log(z)$, se $z \in D_0$ que é a região



temos

$$V(z) = \overline{\Omega(z)}$$

$$V(z) = \overline{\frac{i}{z}} = -\frac{i}{\bar{z}}$$

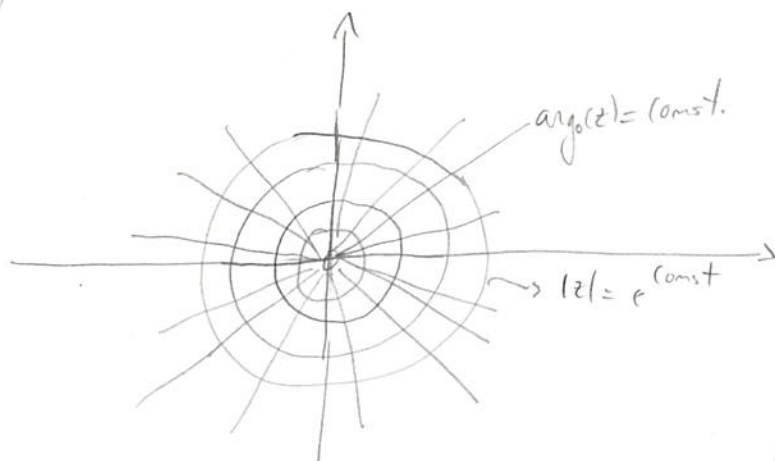
(b)

Para caracterizar graficamente o fluxo, note que

$$\Omega(z) = i (\ln|z| + i \arg_0(z)) = -\arg_0(z) + i \ln|z|$$

Curvas equipotenciais: $-\arg_0(z) = \text{const} \Rightarrow \arg_0(z) = -\text{const}$

Linhas de campo: $\ln|z| = \text{const} \Rightarrow |z| = e^{\text{const}}$
(trajetórias)



Obs.:

Temos uma espécie de "redemoinho":

