

Prova 2 - EDO - 2023/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Encontre a solução geral de cada EDO abaixo:

(1,5)

a. $y^{(4)}(t) + 8y''(t) + 16y(t) = 0$.

(2,0)

b. $y''(t) + 4y(t) = \sec(2t)$, $-\pi/4 < t < \pi/4$.

(2,0)

c. $y^{(5)}(t) - y^{(4)}(t) + y'''(t) - y''(t) = t^2$.

2. Resolva o PVI

(1,5)

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - 4y(x) = 0, y(1) = 7, y'(1) = -3.$$

3. Considere o sistema $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

(2,0)

a. Usando o método dos autovalores e autovetores, encontre a solução geral do sistema.

(1,0)

b. Esboce o retrato de fase do sistema e classifique o ponto de equilíbrio $(0,0)$ como nó assintoticamente estável, nó instável, nó degenerado ou como ponto de sela.

Fórmulas:

Equação de Cauchy-Euler $x^2y''(x) + Bxy'(x) + Cy(x) = 0$:

$$t = \ln(x) \Rightarrow Y''(t) + (B - 1)Y'(t) + CY(t) = 0$$

Soluções de $ay'' + by' + cy = 0$, *caso* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \alpha = -b/2a, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Varição dos parâmetros: $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, sendo

$$u'_1 = -y_2(t)f(t)/(y_1y'_2 - y'_1y_2), \quad u'_2 = y_1(t)f(t)/(y_1y'_2 - y'_1y_2).$$

1. Encontre a solução geral de cada EDO abaixo:

a. $y^{(4)}(t) + 8y''(t) + 16y(t) = 0$.

b. $y''(t) + 4y(t) = \sec(2t)$, $-\pi/4 < t < \pi/4$.

c. $y^{(5)}(t) - y^{(4)}(t) + y'''(t) - y''(t) = t^2$.

a) Eq. característica: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4)^2 = 0$

Temos raízes complexas $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = -2i$ com multiplicidade igual a 2. $\alpha=0, \beta=2$

Soluções L.I.:

$y_1(t) = \cos(2t)$, $y_2(t) = \sin(2t)$, $y_3(t) = t \cos(2t)$, $y_4(t) = t \sin(2t)$.

Solução geral: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + c_3 t \sin(2t) + c_4 t \cos(2t)$.

b) Eq. característica: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

Sol. L.I.: $y_1 = \cos(2t)$, $y_2 = \sin(2t)$

Sol. particular $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, sendo:

$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(2t) \\ \sec(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix}}{W}$, $u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(2t) & 0 \\ -2\sin(2t) & \sec(2t) \end{vmatrix}}{W}$, com

$W = \begin{vmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} = 2[\cos^2(2t) + \sin^2(2t)] = 2$

$u_1'(t) = -\frac{\sin(2t) \cdot \sec(2t)}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \Rightarrow u_1(t) = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} dt$

$u_1(t) = \frac{1}{4} \ln(\cos(2t))$

$\downarrow$
 $u = \cos(2t)$
 $du = -2\sin(2t)$

$$u_2'(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) \sin(2t) = \frac{1}{2} \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{2} t$$

$$y_p(t) = \frac{1}{4} \ln(\cos(2t)) \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} t \cdot \sin(2t)$$

Sol. genal: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + y_p(t)$

c) Eq. característica: $\lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1) = 0$

Raízes: $\lambda_1 = 0$ ($K=2$)

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$$

↓
 $\lambda^2 + 1 = 0$
 $\lambda = \pm i$

Soluções L.I.: $y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = e^t$

$$y_4(t) = \cos(t), y_5(t) = \sin(t)$$

Sol. particular: $y_p(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2, y_p'(t) = 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct$

$$y_p''(t) = 12At^2 + 6Bt + 2C, y_p'''(t) = 24At + 6B, y_p^{(4)}(t) = 24A$$

$$y_p^{(5)}(t) = 0$$

Substituindo na EDO:

$$0 - 24A + 24At + 6B - 12At^2 - 6Bt - 2C = t^2$$

$$-12A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} 24A - 6B = 0 \Rightarrow B = 4A \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \\ -24A + 6B - 2C = 0 \Rightarrow C = 0 \end{array} \right.$$

$$-24A + 6B - 2C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Logo, $y_p(t) = -\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t^3$

Sol. geral: $y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 \sin(t) + C_5 \cos(t) + y_p$

2. Resolva o PVI

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0, y(1) = 7, y'(1) = -3.$$

Eq. de Cauchy-Euler com $B=1$ e $C=-4$. Fazendo a mudança de variável $t = \ln(x)$, sendo $y(t) = y(x)$, obtemos:

$$y''(t) + (B-1)y'(t) + Cy(t) = 0, \text{ ou seja, temos } y''(t) - 4y(t) = 0 \Rightarrow y_1(t) = e^{2t} \text{ e } y_2(t) = e^{-2t}$$

Logo, $y_1(x) = e^{2\ln(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$, $y_2(x) = e^{-2\ln(x)} = x^{-2}$

$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$. Como $y(1) = 7$, temos

$C_1 + C_2 = 7$. Além disso, $y'(x) = 2x C_1 - 2C_2 x^{-3}$,

assim $y'(1) = -3 \Rightarrow 2C_1 - 2C_2 = -3$. Temos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ 2C_1 - 2C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 14 \\ 2C_1 - 2C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow 4C_1 = 11$$

$C_1 = \frac{11}{4}$

$C_2 = 7 - C_1 = 7 - \frac{11}{4} = \frac{28-11}{4} = \frac{17}{4}$. Portanto:

$y(x) = \frac{11}{4}x^2 + \frac{17}{4}x^{-2}$

3. Considere o sistema $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

a. Usando o método dos autovalores e autovetores, encontre a solução geral do sistema.

b. Esboce o retrato de fase do sistema e classifique o ponto de equilíbrio $(0,0)$ como nó assintoticamente estável, nó instável, nó degenerado ou como ponto de sela.

$$a) \mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(t) \Rightarrow |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$-\lambda(1-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2$$
$$\downarrow \lambda_2 = 3$$

Autovetores:

$$\bullet \lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_2 = -2u_1 \\ 3u_1 + u_2 = -2u_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$u_2 = -u_1$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \lambda_2 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_2 = 3u_1 \\ 3u_1 + u_2 = 3u_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

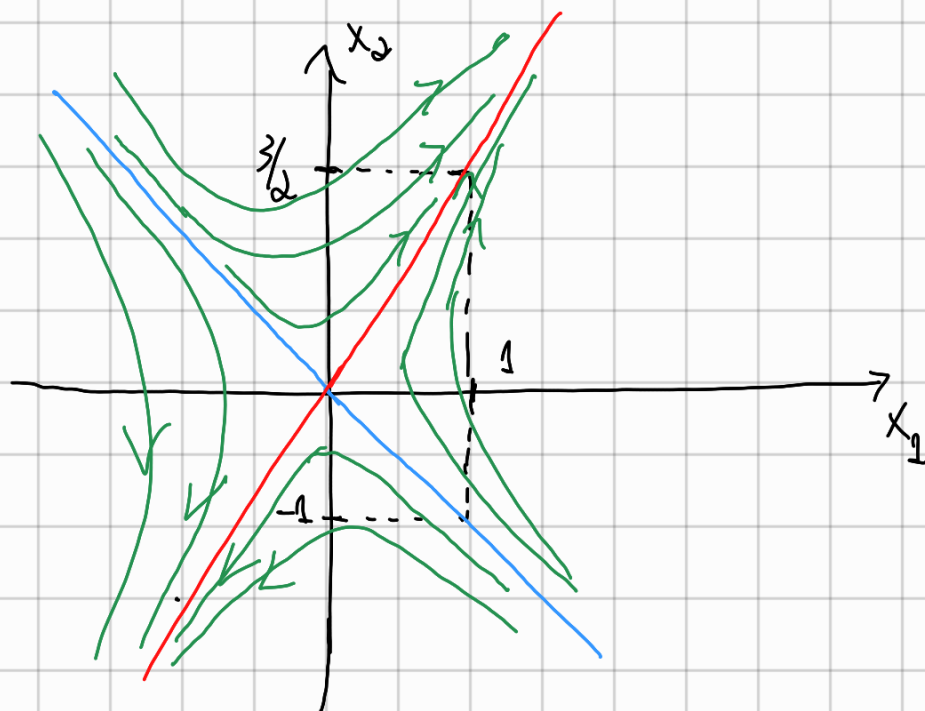
$$2u_2 = 3u_1$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{3}{2}u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solução:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) Retrato de fase:



$(0,0)$ é ponto de sela