

Prova II - EDO - 2023/01

Prof. Luciano Bedin

Nome:

2,0

1. Resolva a EDO: $y''(t) + y(t) = \tan(t)$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

• 2. Encontre uma solução particular para a EDO:

1,5

$$y^{(5)}(t) + 3y^{(4)}(t) + 3y^{(3)}(t) + y''(t) = 6t.$$

3. Considere o sistema $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

2,0

a. Usando o método dos autovalores e autovetores, encontre um conjunto fundamental $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\}$ de soluções para o sistema e escreva sua solução geral.

1,5

b. Esboce o retrato de fase do sistema e classifique o ponto de equilíbrio $(0, 0)$.

4. Considere o modelo simplificado de um carro em que todo o sistema de suspensão funciona como se fosse uma única mola com um único amortecedor. O sistema executa vibrações livres verticais tais que $Mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$, sendo t o tempo (em segundos) e $x = x(t)$ (em metros) a posição vertical do carro com relação à posição de equilíbrio do sistema; $M = 500 \text{ Kg}$ é a massa do carro (em quilogramas), c é a constante de amortecimento e k a constante de mola.

1,5

a. Com o amortecedor desconectado, o sistema de suspensão do carro executa vibrações a 90 ciclos por minuto. Encontre o valor de k .

1,5

b. Admita que com o amortecedor conectado tenhamos $c^2 < 4kM$. O carro executa vibrações (amortecidas) com frequência de 60 ciclos por minuto. Encontre o valor de c .

Fórmulas:

Soluções de $ay'' + by' + cy = 0$, caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \alpha = -b/2a, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Variação dos parâmetros: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, sendo

$$u_1' = -y_2(t)f(t)/(y_1 y_2' - y_1' y_2), \quad u_2' = y_1(t)f(t)/(y_1 y_2' - y_1' y_2).$$

1. Resolva a EDO: $y''(t) + y(t) = \tan(t)$, $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Eq. característica: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Soluções L.I. do problema homogêneo:

$$y_1(t) = \cos(t), \quad y_2(t) = \sin(t)$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = 1$$

Sol. particular: $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$

$$u_1'(t) = -\sin(t) \cdot \tan(t) = -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$$

$$u_1'(t) = \frac{\cos^2(t) - 1}{\cos(t)} = \cos(t) - \sec(t)$$

$$u_1(t) = \int \cos(t) dt - \int \sec(t) dt$$

$$u_1(t) = \sin(t) - \ln|\sec(t) + \tan(t)| + C$$

$C=0$

$$u_2'(t) = \cos(t) \tan(t) = \sec(t)$$

$$u_2(t) = \int \sec(t) dt = -\cos(t) + C$$

$$C=0$$

Logo: $y_p(t) = \cos(t) [\sec(t) - \ln|\sec(t) + \tan(t)|]$
 $-\sec(t)\cos(t) = -\cos(t) \cdot \ln|\sec(t) + \tan(t)|$

Solução da EDO:

$$y(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sec(t) - \cos(t) \cdot \ln|\sec(t) + \tan(t)|$$

• 2. Encontre uma solução particular para a EDO:

$$y^{(5)}(t) + 3y^{(4)}(t) + 3y^{(3)}(t) + y''(t) = 6t.$$

Eq. característica: $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$$\lambda^2 [\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1] = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda + 1)^3 = 0$$

Raízes: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$

Sol. L.I. do problema homogêneo:

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = t, \quad y_3(t) = e^{-t}, \quad y_4(t) = t e^{-t} \\ y_5(t) = t^2 e^{-t}$$

Sol. particular:

$$y_p(t) = (At^3 + Bt^2)$$

$$y_p'(t) = 3At^2 + 2Bt$$

$$y_p''(t) = 6At + 2B, \quad y_p'''(t) = 6A, \quad y_p^{(4)}(t) = y_p^{(5)}(t) = 0$$

Substituindo na EDO:

$$0 + 0 + 3 \cdot 6A + [6At + 2B] = 6t$$

$$18A + 2B = 0, \quad 6A = 6 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$\Downarrow 2B = -18 \Rightarrow \boxed{B = -9}$$

$$\boxed{y_p(t) = t^3 - 9t^2}$$

3. Considere o sistema $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

a. Usando o método dos autovalores e autovetores, encontre um conjunto fundamental $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\}$ de soluções para o sistema e escreva sua solução geral.

b. Esboce o retrato de fase do sistema e classifique o ponto de equilíbrio $(0, 0)$.

a) Autovalores:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$-2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \lambda_1 = -3 & \lambda_2 = 2 \end{array}$$

Autovetores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 2v_1 \\ 4v_1 - 2v_2 = 2v_2 \end{cases}$$

$$\boxed{v_1 = v_2} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = -3v_1 \\ 4v_1 - 2v_2 = -3v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1 + v_2 = 0 \\ 4v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = -4v_1$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -4v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solução da EDO:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

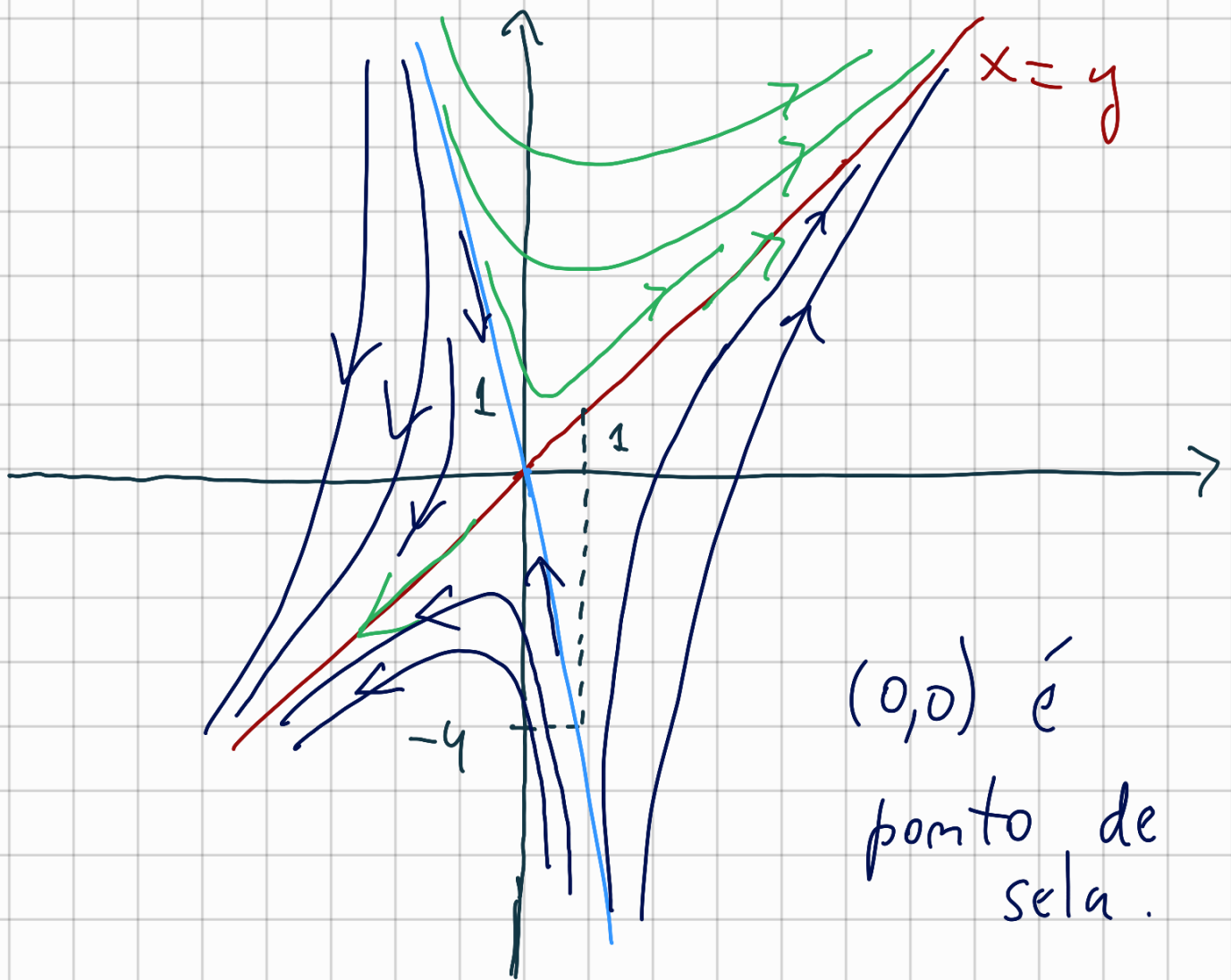
b) Se $t \rightarrow \infty$, $x(t) \approx c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Se $t \rightarrow -\infty$, $x(t) \approx c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Ao longo da reta $x=y$, $x(t)$ se afasta de $(0,0)$.

Ao longo da reta $y=-4x$, $x(t)$ se aproxima de $(0,0)$.

Retrato de fase:



4. Considere o modelo simplificado de um carro em que todo o sistema de suspensão funciona como se fosse uma única mola com um único amortecedor. O sistema executa vibrações livres verticais tais que $Mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$, sendo t o tempo (em segundos) e $x = x(t)$ (em metros) a posição vertical do carro com relação à posição de equilíbrio do sistema; $M = 500 \text{ Kg}$ é a massa do carro (em quilogramas), c é a constante de amortecimento e k a constante de mola.

a. Com o amortecedor desconectado, o sistema de suspensão do carro executa vibrações a 90 ciclos por minuto. Encontre o valor de k .

b. Admita que com o amortecedor conectado tenhamos $c^2 < 4kM$. O carro executa vibrações (amortecidas) com frequência de 60 ciclos por minuto. Encontre o valor de c .

a) Com $c=0$, temos a EDO

$Mx''(t) + kx(t) = 0$, cuja solução é $x(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi)$, sendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Logo, a frequência das oscilações é $\frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{500}} \cdot \frac{1}{2\pi} \text{ ciclos/s}$. Assim, devemos ter:

$$\sqrt{\frac{k}{500}} \cdot \frac{1}{2\pi} = 90 \text{ ciclos} / \frac{60 \text{ s}}{60} = \frac{3}{2} \text{ ciclos/s}$$

$$\frac{k}{500} = \left(2\pi \cdot \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow k = 500 \cdot 9\pi^2$$

$$k = 4500\pi^2 \text{ N/m}$$

b) Se $c^2 < 4KM$ temos movimento sub-amortecido, sendo:

$$x(t) = A e^{-\frac{c}{2M}t} \cos(\omega_0 t - \phi), \text{ com}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4KM - c^2}}{2M}.$$

A frequência das oscilações amortecidas é dada então por:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2M} \cdot \sqrt{4KM - c^2}$$

Para encontrar c :

$$\frac{1}{4\pi \cdot 500} = \frac{\sqrt{4 \cdot 500 \cdot K - c^2}}{2M} = 60 \text{ ciclos} / 60s$$

$$\frac{1}{2000\pi} \cdot \sqrt{2000K - c^2} = 1$$

$$2000K - c^2 = (2000\pi)^2 \Rightarrow c^2 = 2000K - (2000\pi)^2$$

$$C^2 = 2000 \cdot 4500 \pi^2 - (2000)^2 \cdot \pi^2$$

$$C^2 = 2000 \pi^2 [4500 - 2000] = 2000 \cdot 2500 \cdot \pi^2$$

$$C = \sqrt{2000} \cdot \sqrt{2500} \cdot \sqrt{\pi^2}$$

$$C = 20 \sqrt{5} \cdot 50 \cdot \pi = 1000 \sqrt{5} \pi \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$$