

Recuperação - EDO - 2023/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. (3,0 pontos) Encontre uma família de soluções a um parâmetro para cada EDO abaixo:

a. $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$.

b. $x^2y' + 2xy = 5y^4, \quad x > 0$.

2. Considere o sistema $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

a.(1,25 pontos) Usando o método dos autovalores e autovetores, encontre um conjunto fundamental $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\}$ de soluções para o sistema e escreva sua solução geral.

b.(0,75 pontos) Esboce o retrato de fase do sistema e classifique o ponto de equilíbrio $(0, 0)$.

3. (2,0 pontos) Resolva a EDO

$$y'''(t) - 2y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) = 6te^{2t}.$$

4. Considere o PVI:

$$y'' - 4y' + 3y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

sendo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi, \\ \sin(2t), & \pi < t < 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi. \end{cases}$$

a.(1,0 pontos) Escreva $f(t)$ em termos da função degrau unitário e encontre sua transformada de Laplace.

b.(2,0 pontos) Usando o item (a) e a transformada de Laplace, resolva o PVI.

5. (1,5 pontos) Usando a transformada de Laplace, resolva o PVI

$$ty'' - 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 0.$$

Fórmulas:

Equação de Bernoulli $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)y^n$: substituição $w = y^{1-n}$

Equação quase-exata, fator integrante:

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{M_y - N_x}{N} dx, \quad \frac{d\beta}{\beta} = \frac{N_x - M_y}{M} dy.$$

Solução da EDO $y'(x) + P(x)y(x) = f(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \left(\int I(x)f(x)dx + k \right),$$

sendo $I(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Equação de Cauchy-Euler $x^2y''(x) + Bxy'(x) + Cy(x) = 0$:

$$t = \ln(|x|) \Rightarrow Y''(t) + (B-1)Y'(t) + CY(t) = 0$$

Soluções de $ay'' + by' + cy = 0$, *caso* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \alpha = -b/2a, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Variação dos parâmetros: $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, sendo

$$u'_1 = -y_2(t)f(t)/(y_1y'_2 - y'_1y_2), \quad u'_2 = y_1(t)f(t)/(y_1y'_2 - y'_1y_2).$$

Soluções L.I. no caso de autovalores complexos $r_1 = \lambda + \mu i$, $r_2 = \lambda - \mu i$:

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\cos(\mu t)\mathbf{p} - \sin(\mu t)\mathbf{q})$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\sin(\mu t)\mathbf{p} + \cos(\mu t)\mathbf{q}),$$

sendo $\mathbf{p} + \mathbf{q}i$ autovetor correspondente.

Soluções L.I. no caso de autovalor repetido λ *com um único autovetor* $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u} + e^{\lambda t}t\mathbf{v},$$

sendo $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

1) a. $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0.$

$$M(x,y) = 2y^2x - 3, \quad N(x,y) = 2yx^2 + 4$$

$$M_y = 4yx, \quad N_x = 4yx \Rightarrow M_y = N_x$$

(EDO exata).

Então existe $z = f(x,y)$ tal que:

$$f_x = M, \quad f_y = N$$

$$f_x = 2y^2x - 3 \Rightarrow f(x,y) = \int (2y^2x - 3) dx$$

$$f(x,y) = y^2x^2 - 3x + h(y) \Rightarrow f_y = 2yx^2 + h'(y)$$

$$f_y = N \Rightarrow 2yx^2 + h'(y) = 2yx^2 + 4, \quad h'(y) = 4, \quad h(y) = 4y$$

Logo, $f(x,y) = y^2x^2 - 3x + 4y$ e assim a

Solução da EDO é $y^2x^2 - 3x + 4y = \text{const.}$

1)

$$b. x^2 y' + 2xy = 5y^4, \quad x > 0.$$

$$w = y^{1-4} = y^{-3}, \quad w' = -3y^{-4} y'$$

$$-3y^{-4} x^2 y' + 2x \cdot (-3y^{-4}) y = 5y^4 (-3y^{-4})$$

$$x^2 w' - 6xw = -15 \Rightarrow w' - \frac{6}{x} w = -\frac{15}{x^2}$$

$$p(x) = -\frac{6}{x}, \quad \int p(x) dx = -6 \ln(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} I(x) = e^{-6 \ln(x)} = x^{-6} \end{array} \right.$$

$$w(x) = \frac{C}{x^{-6}} + \frac{1}{x^{-6}} \int x^{-6} \cdot (-15 x^{-2}) dx$$

$$w(x) = C x^6 + x^6 \cdot (-15) \cdot \int x^{-8} dx = C x^6 - 15 x^6 \cdot \frac{x^{-7}}{-7}$$

$$w(x) = C x^6 + \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{como } w = y^{-3}, \text{ tenemos } y(x) = \left(C x^6 + \frac{15}{7x} \right)^{-1/3}$$

2. Considere o sistema $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$.

a. (1,25 pontos) Usando o método dos autovalores e autovetores, encontre um conjunto fundamental $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\}$ de soluções para o sistema e escreva sua solução geral.

b. (0,75 pontos) Esboce o retrato de fase do sistema e classifique o ponto de equilíbrio $(0,0)$.

$$a) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = 0$$

$$-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (1+2i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$3v_1 - 2v_2 = (1+2i)v_1 \Rightarrow (2-2i)v_1 = 2v_2$$

$$4v_1 - v_2 = (1+2i)v_2$$

$$(1-i)v_1 = v_2$$



$$4v_1 = (2+2i)v_2 \Rightarrow \frac{2v_1}{1+i} = v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{2v_1 \cdot (1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$v_2 = \frac{2v_1(1-i)}{2} \Rightarrow v_2 = (1-i)v_1$$

Autovetores: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ (1-i)v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Com $v_1=1$, temos $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot i$

Logo $\eta = 2 + i$ $\rightarrow \lambda = 2$
 $\rightarrow \gamma = 1$

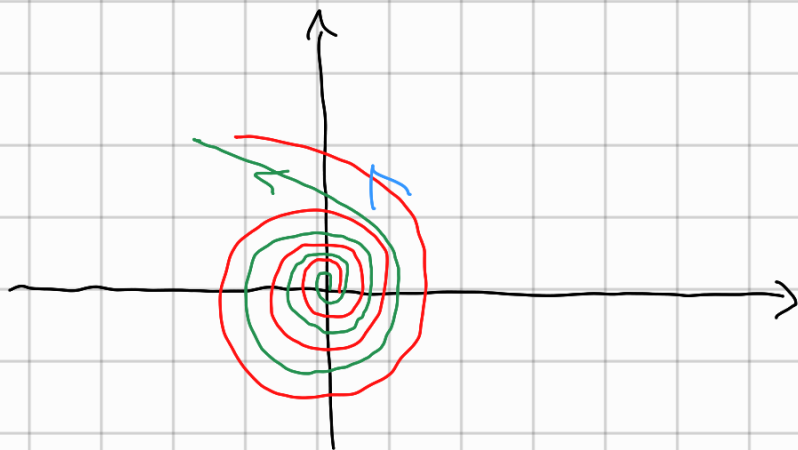
$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solução: $x(t) = C_1 u(t) + C_2 v(t)$, sendo

$$u(t) = e^{2t} \cdot \left[\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$v(t) = e^{2t} \left[\sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

b)



Como $\lambda > 0$, temos um nó espinal instável.

3. (2,0 pontos) Resolva a EDO

$$y'''(t) - 2y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) = 6te^{2t}.$$

Eq. característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$

$$\lambda^2(\lambda - 2) - 4(\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda - 2) = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \lambda_1 = 2 \quad (k=2) \\ \rightarrow \lambda_2 = -2 \quad (k=1) \end{array}$$

Sol. do problema homogêneo:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t}$$

Sol. particular: $y(t) = e^{2t} [At^3 + Bt^2]$

$$y' = 2e^{2t} [At^3 + Bt^2] + e^{2t} [3At^2 + 2Bt]$$

$$y' = e^{2t} [2At^3 + 2Bt^2 + 3At^2 + 2Bt]$$

$$y' = e^{2t} [2At^3 + (2B + 3A)t^2 + 2Bt]$$

$$y'' = 2e^{2t} [\dots] + e^{2t} [6At^2 + (4B + 6A)t + 2B]$$

$$y'' = e^{2t} [4At^3 + (4B + 6A)t^2 + 4Bt + 6At + (4B + 6A)t + 2B]$$

$$y'' = e^{2t} [4At^3 + (12A + 4B)t^2 + (8B + 6A)t + 2B]$$

$$y''' = 2e^{2t} [\dots] + e^{2t} [12At^2 + (24A + 8B)t + (8B + 6A)]$$

$$y''' = e^{2t} [8At^3 + (24A + 8B)t^2 + (16B + 12A)t + 4B + 12At^2 + (24A + 8B)t + (8B + 6A)]$$

$$y''' = e^{2t} [8At^3 + (36A + 8B)t^2 + (24B + 36A)t + 12B + 6A]$$

Substituyendo en EDO:

$$\cancel{8A}t^3 + (\cancel{36A} + \cancel{8B})t^2 + (\cancel{24B} + \cancel{36A})t + 12B + 6A$$

$$-\cancel{8A}t^3 - (\cancel{24A} + \cancel{8B})t^2 - (\cancel{16B} + \cancel{12A})t - 4B$$

$$-\cancel{8A}t^3 - (\cancel{8B} + \cancel{12A})t^2 - \cancel{8B}t + \cancel{8A}t^3 + \cancel{8B}t^2 = 6te^{2t}$$

$$24A = 6 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}} \quad \left\{ \begin{array}{l} 8B + 6A = 0 \end{array} \right.$$

$$8B = -6/4 \Rightarrow B = -\frac{6}{32}$$

$$\boxed{B = -\frac{3}{16}}$$

$$y_p(t) = e^{2t} \left[\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{16}t^2 \right]$$

Solução: $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} + e^{2t} \left[\frac{1}{4} t^3 - \frac{3}{16} t^2 \right]$

4. Considere o PVI:

$$y'' - 4y' + 3y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

sendo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi, \\ \sin(2t), & \pi < t < 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi. \end{cases}$$

a. (1,0 pontos) Escreva $f(t)$ em termos da função degrau unitário e encontre sua transformada de Laplace.

b. (2,0 pontos) Usando o item (a) e a transformada de Laplace, resolva o PVI.

$$a) f(t) = u_{\pi}(t) \sin(2t) - u_{2\pi}(t) \sin(2t)$$

$$f(t) = u_{\pi}(t) \cdot \sin(2(t - \pi + \pi)) - u_{2\pi}(t) \sin(2(t - 2\pi + 2\pi))$$

$$f(t) = u_{\pi}(t) \sin(2(t - \pi)) - u_{2\pi}(t) \sin(2(t - 2\pi))$$

$$F(s) = e^{-\pi s} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} - e^{-2\pi s} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$b) s^2 Y(s) - 4s Y(s) + 3Y(s) = F(s)$$

$$(s^2 - 4s + 3) Y(s) = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{(s^2 - 4s + 3)}$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)(s-3)} = \frac{2e^{-\pi s} u_{\pi}(s)}{(s^2+4)(s-1)(s-3)} - \frac{2e^{-2\pi s} u_{2\pi}(s)}{(s^2+4)(s-1)(s-3)}$$

$$\frac{2}{(s-1)(s-3)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$2 = A(s-3)(s^2+4) + B(s-1)(s^2+4) + (Cs+D)(s-1)(s-3)$$

$$s=1 \Rightarrow 2 = -10A \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$$

$$s=3 \Rightarrow 2 = 2B \cdot 13 \Rightarrow B = \frac{1}{13}$$

$$s=0 \Rightarrow 2 = -3A \cdot 4 + B \cdot (-1) \cdot 4 + D \cdot (-1) \cdot (-3)$$

$$2 = -12 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \frac{1}{13} + 3D$$

$$2 = \frac{12}{5} - \frac{4}{13} + 3D \Rightarrow 3D = -\frac{6}{65} \Rightarrow D = -\frac{2}{65}$$

↓
x(65)

$$s=-1 \Rightarrow 2 = -4A \cdot 5 - 2B \cdot 5 + (-C+D) \cdot (-2) \cdot (-4)$$

$$2 = -20 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 10 \cdot \frac{1}{13} - 8C + 8D$$

$$2 = 4 - \frac{10}{13} - 8C - \frac{16}{65} \Rightarrow 8C = 2 - \frac{10}{13} - \frac{16}{65}$$

$$C = \frac{8}{65}$$

$$\frac{2}{(s-1)(s-3)(s^2+4)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{\frac{8}{65}s - \frac{2}{65}}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-1)(s-3)(s^2+4)} \right\} (t) = -\frac{1}{5} e^t + \frac{1}{13} e^{3t} + \frac{8}{65} \cos(2t)$$

$$-\frac{1}{65} \sin(2t) = h(t)$$

$$\text{Logo } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\pi s} \cdot 2}{(s-1)(s-3)(s^2+4)} \right\} (t) = \mathcal{U}_{\pi}(t) h(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2 e^{-2\pi s}}{(s-1)(s-3)(s^2+4)} \right\} (t) = \mathcal{U}_{2\pi}(t) h(t-2\pi)$$

Solução:

$$y(t) = U_{\pi}(t) \cdot \left[-\frac{1}{5} e^{(t-\pi)} + \frac{1}{13} e^{3(t-\pi)} + \frac{8}{65} \cos(2(t-\pi)) - \frac{1}{65} \sin(2(t-\pi)) \right]$$

$$- U_{2\pi}(t) \cdot \left[-\frac{1}{5} e^{(t-2\pi)} + \frac{1}{13} e^{3(t-2\pi)} + \frac{8}{65} \cos(2(t-2\pi)) - \frac{1}{65} \sin(2(t-2\pi)) \right]$$

5. (1,5 pontos) Usando a transformada de Laplace, resolva o PVI

$$ty'' - 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{ty\} &= 0 \\ -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y''\} - 2[sY(s) - y(0)] - \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y\} &= 0 \\ -\frac{d}{ds} [s^2 Y(s) - s \overset{0}{y(0)} - y'(0)] - 2sY(s) - Y'(s) &= 0 \\ -s^2 Y'(s) - 2sY(s) - 2sY(s) - Y'(s) &= 0 \\ (s^2 + 1)Y'(s) = 4sY(s) \Rightarrow Y'(s) = \frac{4s}{s^2 + 1} \cdot Y(s) \Rightarrow \frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{4s}{s^2 + 1} \\ \int \frac{Y'(s)}{Y(s)} ds = \int \frac{4s}{s^2 + 1} ds \Rightarrow \ln|Y(s)| = -2 \ln(s^2 + 1) + C \\ \downarrow \\ u = s^2 + 1, \quad du = 2s ds, \quad 2du = 4s ds \end{aligned}$$

$$\ln |Y(s)| = \ln (s^2+1)^{-2} + C \Rightarrow |Y(s)| = (s^2+1)^{-2} \cdot e^C$$

exp

$$Y(s) = A \cdot \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$y(t) = A \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\} (t) = A \cdot \int_0^t \cos(t-u) \cos(u) du$$

convolução

$$\begin{aligned} \cos(t-u) \cdot \cos(u) &= \frac{1}{2} \left[\cos(t-u+u) + \cos(t-u-u) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos(t) + \cos(t-2u) \right] \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{A}{2} \left[\int_0^t \cos(t) du + \int_0^t \cos(t-2u) du \right]$$

$$\begin{aligned} V &= t-2u \\ dV &= -2du \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{A}{2} \left[\cos(t) \cdot \int_0^t du + \int_t^{-t} \cos(V) \cdot \frac{-1}{2} dV \right]$$

$$y(t) = \frac{A}{2} \cdot \left[\cos(t) \cdot t - \frac{1}{2} \sin(V) \right]_t^{-t}$$

$$y(t) = \frac{A}{2} \left[\cos(t) \cdot t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]$$