

Disciplina: MTM 5629- Equações Diferenciais Parciais  
Professor: Luciano Bedin

Prova 1 - 2018/02

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

Questões:

1. Encontre uma região aberta  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  contendo a curva inicial dada e uma solução  $u \in C^1(\Omega)$  para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = u^2 + 1 \\ u(s, 0) = -s^2, \quad s > 0. \end{cases}$$

2. Encontre a solução geral da EDP

$$xyu_x - x^2u_y + yu = 0$$

em  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$ .

3. Classifique e reduza à forma canônica a seguinte EDP

$$(1+x^2)^2 u_{xx} - 2(1+x^2)(1+y^2)u_{xy} + (1+y^2)^2 u_{yy} = xu^2.$$

4. Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  não nulo e defina

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x), & -\pi < x \leq \pi \\ f(x + 2\pi), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Usando a série de Fourier de  $f$ , mostre que

$$\cotg(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \right)$$

quando  $\alpha$  não é inteiro.

5. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $T = 2L$ . Mostre que se  $f'$  é contínua, então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

é convergente, sendo  $a_n$  e  $b_n$  os coeficientes de Fourier de  $f$ .



# Resolução P1 - EDP - 2018/01

$$(1) \quad \frac{dx}{dz} = -y, \quad \frac{dy}{dz} = x, \quad \frac{dz}{d\tau} = z^2 + 1$$

$$x(0, s) = s, \quad y(0, s) = 0, \quad z(0, s) = -s^2$$

Note que  $x'' = -y' = -x$ , logo  $x''(\tau) + x(\tau) = 0$  e temos

$$x(\tau, s) = C_1(s) \cos(\tau) + C_2(s) \sin(\tau)$$

$$y(\tau, s) = -\frac{dx}{d\tau} = +C_1(s) \sin(\tau) - C_2(s) \cos(\tau).$$

Como  $y(0, s) = 0$  obtemos  $C_2 = 0$  e assim

$$(*) \quad x(\tau, s) = s \cos(\tau), \quad y(\tau, s) = s \sin(\tau).$$

Por sua vez,  $\frac{dz}{d\tau} = d\tau$  implica com  $z^2 + 1$

$$\arctg(z(\tau, s)) = \tau + C(s). \text{ Fazendo } \tau=0, \text{ temos } C(s) = \arctg(-s^2).$$

Logo  $\boxed{\arctg(z) = \tau - \arctg(s^2)} (**)$

Suponha  $0 < \tau < \pi/2$ , então como  $x = s \cos(\tau)$  e  $y = s \sin(\tau)$ , obtemos  $tg(\tau) = \frac{y}{x}$ . Dessa forma

$$z = \frac{tg(\tau) - s^2}{1 + tg(\tau) \cdot s^2} \Rightarrow u(x, y) = \frac{\frac{y}{x} - (x^2 + y^2)}{1 + \frac{y}{x} \cdot (x^2 + y^2)}$$

na região  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$

$$\textcircled{2} \quad xy\mu_x - x^2\mu_y + y\mu = 0$$

$$a=xy, \quad b=-x^2, \quad c=y$$

$$a dy - b dx = 0 \Rightarrow xy dy + x^2 dx = 0 \Rightarrow y dy + x dx = 0$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \text{const.}$$

Considere a mudança de variáveis:

$$s = x^2 + y^2$$

$$\tau = y$$

Note que

$$\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ \tau_x & \tau_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0 \text{ em } \mathcal{R}.$$

Dessa forma podemos escrever  $x$  e  $y$  em função de  $(s, \tau)$ . De fato,

$$\tau = y \Rightarrow x^2 = s - \tau^2 \Rightarrow x = (s - \tau^2)^{1/2} \quad (\text{claramente } s > \tau^2).$$

Logo, sendo  $v(s, \tau) = u(x(s, \tau), y(s, \tau))$ , temos

$$(a\tau_x + b\tau_y)v_\tau + cv = 0$$

$$-x^2 v_\tau + yv = 0 \Rightarrow (\tau^2 - s)v_\tau + \tau v = 0$$

$$\Rightarrow v_\tau - \left(\frac{\tau}{s - \tau^2}\right)v = 0$$

Considere o fator integrante:

$$-\int \frac{\tau}{s - \tau^2} d\tau$$

$$-\frac{1}{2} \ln(s - \tau^2)$$

$$y = e$$

$$\Rightarrow$$

$$y = e$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s - \tau^2}}$$

Então a EDO pode ser escrita como

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{s-\tau^2}} v \right) = 0 \Rightarrow v(\tau, s) = F(s) \cdot \sqrt{s-\tau^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x, y) = F(x^2 + y^2) \cdot x}, \text{ para qualquer função } F \in C^1(\mathbb{R}).$$

3)  $\delta = (1+x^2)(1+y^2)^2 - (1+x^2)^2(1+y^2)^2 = 0$   
EDP parabólica em  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Seja  $y = \frac{b + \sqrt{\delta}}{a} = -\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1+y^2)}{(1+x^2)}$

e consideremos a EDO

$$dy - ydx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}, \text{ então}$$

$\arctg(y) + \arctg(x) = \text{const}$  é solução implícita.

Considere a transformação  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow A$

$$\begin{cases} s = \arctg(y) + \arctg(x), \text{ sendo} \\ \tau = y \end{cases} \quad A = \left\{ (s, \tau) \in \mathbb{R}^2 / -\pi/2 < s - \arctg(\tau) < \pi/2 \right\}$$

Então  $\begin{vmatrix} s_x & s_y \\ \tau_x & \tau_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$

O que implica que podemos expressar  $x = x(s, \tau)$   
 $y = y(s, \tau)$ , Dessa forma, sendo  $v(s, \tau) = u(x(s, \tau), y(s, \tau))$   
temos



$$u_x = V_\xi \cdot \xi_x + V_\eta \cdot \eta_x = +\frac{1}{1+x^2} V_\xi$$

$$u_{xx} = +\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \left[ V_\xi \xi_x + V_\eta \eta_x \right] - \frac{2x}{(1+x^2)^2} V_\xi = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 V_{\xi\xi} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} V_\xi$$

$$u_{xy} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \left( V_{\xi\xi} \xi_y + V_{\xi\eta} \eta_y \right) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \left( \frac{1}{1+y^2} V_{\xi\xi} + V_{\xi\eta} \right)$$

$$u_y = V_\xi \xi_y + V_\eta \eta_y = \frac{1}{1+y^2} V_\xi + V_\eta$$

$$u_{yy} = \left(\frac{1}{1+y^2}\right) \left( V_{\xi\xi} \xi_y + V_{\xi\eta} \eta_y \right) - \frac{2y}{(1+y^2)^2} V_\xi + V_{\eta\xi} \xi_y + V_{\eta\eta} \eta_y$$

$$u_{yy} = \left(\frac{1}{1+y^2}\right)^2 V_{\xi\xi} + \left(\frac{1}{1+y^2}\right) V_{\xi\eta} - \frac{2y}{(1+y^2)^2} V_\xi + \frac{1}{1+y^2} V_{\eta\xi} + V_{\eta\eta}$$

Substituindo na EDP

$$V_{\xi\xi} - 2xV_\xi - 2V_{\xi\xi} - \frac{2(1+y^2)}{2} V_{\xi\eta} + V_{\xi\xi} + (1+y^2)V_{\xi\eta} - 2yV_\xi + (1+y^2)V_{\eta\xi} + (1+y^2)V_{\eta\eta} = xV^2$$

ou seja, temos:  $(1+y^2)V_{\eta\eta} = (2x+2y)V_\xi + xV^2$

$$V_{\eta\eta} = \frac{2(x+y)}{1+y^2} V_\xi + \frac{x}{1+y^2} V^2$$

Como  $\tau = y$  temos  $\arctg(x) = -\arctg(\tau) + s = s - \arctg(\tau)$ ,  
ou seja,  $x = \operatorname{tg}(s - \arctg(\tau))$ :

$$\text{Logo } V_{\eta\eta} = \left[ \frac{2}{1+\tau^2} \right] \left( \operatorname{tg}(s - \arctg(\tau)) + \tau \right) V_\xi + \frac{\operatorname{tg}(s - \arctg(\tau))}{1+\tau^2} V^2$$

para  $(s, \tau) \in A$

Suponha  $\alpha$  não inteiro

$$(4) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha \pi} \left[ \sin(\alpha x) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\alpha \pi} \left[ \sin(\alpha \pi) - \sin(-\alpha \pi) \right] = \frac{2 \sin(\alpha \pi)}{\alpha \pi}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) \cos(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \cos(\alpha x + mx) + \cos(\alpha x - mx) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{\alpha+m} \right) \sin((\alpha+m)x) \right]_{-\pi}^{\pi} + \left( \frac{1}{\alpha-m} \right) \sin((\alpha-m)x) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{\alpha+m} \right) \sin((\alpha+m)\pi) + \left( \frac{1}{\alpha-m} \right) \sin((\alpha-m)\pi) \right]$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x) \sin(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sin(\alpha x + mx) + \sin(mx - \alpha x) \right] dx = 0.$$

Portanto, a série de Fourier de  $f$  é

$$\frac{2 \cdot 1}{\alpha \pi} \sin(\alpha \pi) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{\alpha+m} \right) \sin((\alpha+m)\pi) + \left( \frac{1}{\alpha-m} \right) \sin((\alpha-m)\pi) \right] \cos(mx)$$

e converge a

$$\begin{cases} \cos(\alpha x), & -\pi < x < \pi \\ \frac{\cos(\alpha \pi) + \cos(-\alpha \pi)}{2} = \cos(\alpha \pi), & x = \pi \\ & \text{ou} \\ & x = -\pi \end{cases}$$

Fazendo  $x = \pi$  temos

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{1}{2\pi} \sin(\alpha\pi) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{\alpha+n} \right) (-1)^n \sin(\alpha\pi) + \left( \frac{1}{\alpha-n} \right) (-1)^n \sin(\alpha\pi) \right]$$

$$\cotg(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n} \right) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \right].$$

5) Sejam  $a'_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ ,  $b'_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

os coeficientes de Fourier de  $f'$ . (Como  $f' \in \mathcal{L}^2([0, L])$ )

(Uma vez que  $f'$  é contínua), pela desigualdade

de Bessel sabemos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'^2 < \infty$  e que  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n'^2 < \infty$ . Agora, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[ f \cdot \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L - \int_{-L}^L f' \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f' \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} b'_n \end{aligned}$$

Logo  $|a_n| \leq \frac{L^2}{2n^2\pi^2} + \frac{b_n'^2}{2}$  e a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é então convergente. Analogamente

podemos provar que  $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$  é convergente.



$$n) \int (-1)^n$$

$$(\text{ou seja}) \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq |a_n| + |b_n|, \text{ podemos}$$

$$\text{concluir que } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} < \infty.$$

$$\left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$