

Introdução ao Cálculo- Prova 2

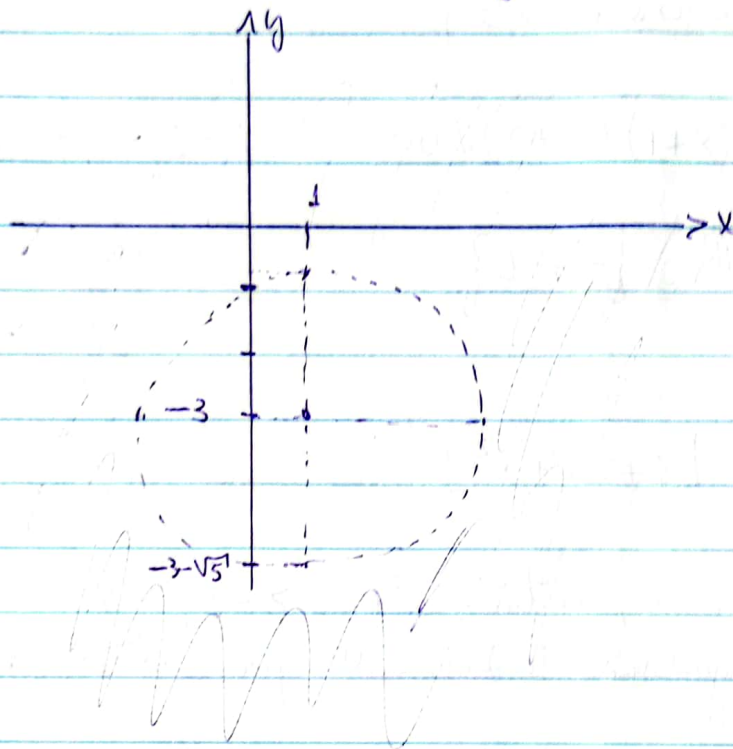
Nome:

1. Represente graficamente as relações abaixo:
 - a. (0,5 pontos) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - 1)^2 + (y + 3)^2 > 5\}$
 - b. (1,0 pontos) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 1 - y - x \leq 0, 2x \leq 3 - y, y \leq x + 1\}$
2. Encontre o domínio natural das funções abaixo
 - a. (1,0 pontos) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 - 5x}}$
 - b. (0,5 pontos) $f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}$
3. (1,5 pontos) Para todo $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, prove que $(1+x)^{2n} > 1 + 2nx$.
(Dica: Não use indução e sim a desigualdade de Bernoulli).
4. (2,0 pontos) Encontre as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ e determine seus domínios sabendo que $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
5. (2,0 pontos) Seja $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$. Prove que $\inf A = 0$.
6. (1,5 pontos) Considere o conjunto $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Encontre uma relação de equivalência R sobre E e determine o conjunto quociente E/R .

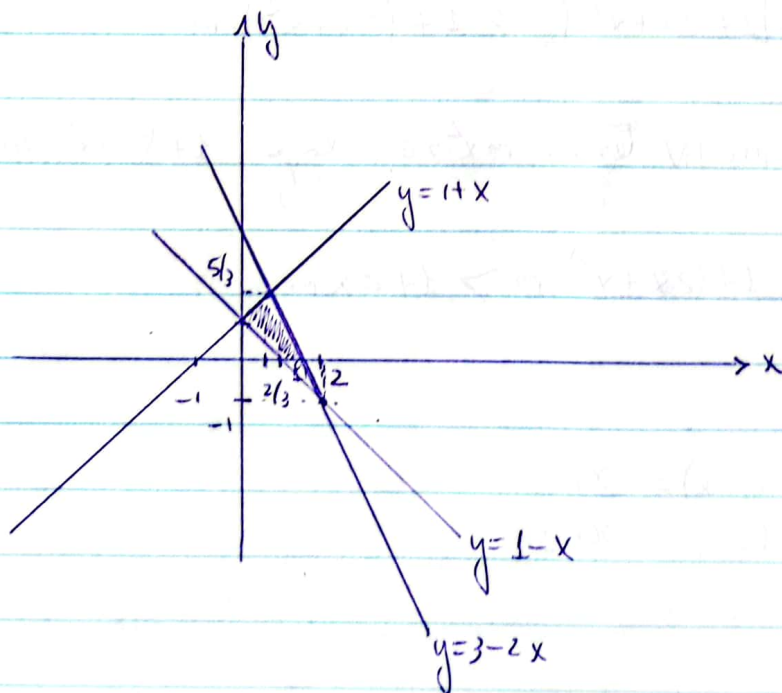
Introdução ao Cálculo: 2006/02

Resolução da Prova 2:

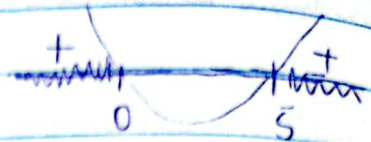
① $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x-1)^2 + (y+3)^2 > 5\}$



②



$$(2) a) x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x(x-5) > 0$$



$$x < 0 \text{ ou } x > 5$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 5\}$$

$$b) x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq -2$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$(3) (1+x)^{2m} = [(1+x)^2]^m = [1+2x+x^2]^m$$

Como $1+2x+x^2 \geq 0, \forall x$, então $x^2+2x \geq -1, \forall x$ e podemos utilizar a desigualdade de Bernoulli para obter:

$$(1+x)^{2m} = [1+2x+x^2]^m \geq 1+(2x+x^2) \cdot m$$

Do fato que $x \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$ temos $mx^2 > 0$, logo $1+(2x+x^2) \cdot m = 1+2xm$ e assim,

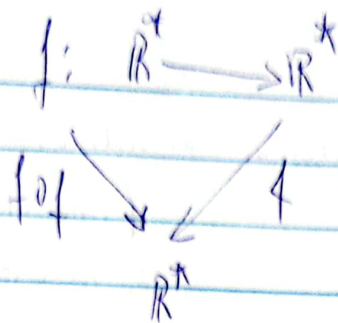
$$(1+x)^{2m} \geq 1+(2x+x^2) \cdot m > 1+2xm$$

$$(4) f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\Rightarrow f \circ g$$

Para definirmos essa função temos de considerar $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$

Desse forma,



$f \circ f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ é dada por $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

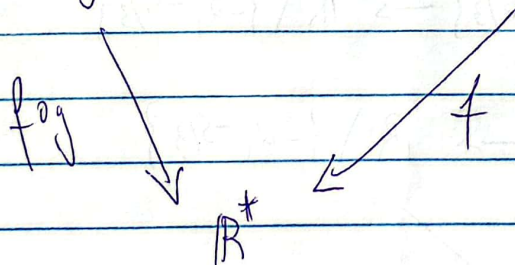
$$= x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

$$(f \circ f)(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{1+x^2}$$

$\Rightarrow (f \circ g)(x)$; Para definirmos essa função devemos considerar

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ e } f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$



$$f \circ g: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}^*$$

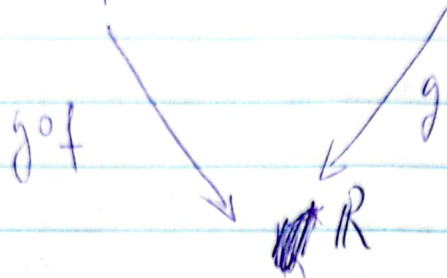
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}} + \frac{x+2}{x+2} = \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{(x+2)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x+2)}$$

$\Rightarrow g \circ f$; Para definirmos essa função devemos considerar:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$$



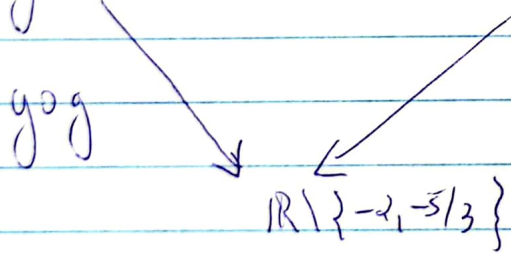
$$g \circ f: \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)+2}$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x} + x + 1}{\frac{1}{x} + x + 2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$\Rightarrow g \circ g$; Para definirmos essa função devemos considerar:

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-2, -5/3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2, -5/3\}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-2, -5/3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2, -5/3\}$$



$$g \circ g: \mathbb{R} \setminus \{-2, -5/3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2, -5/3\}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)+2} = \frac{\frac{x+1}{x+2} + 1}{\frac{x+1}{x+2} + 2} = \frac{2x+3}{3x+5}$$

⑤ $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$. Prove que $\inf A = 0$.

Devemos mostrar inicialmente que 0 é uma cota inferior para A. De fato, $\forall x \in A$, $x = \frac{1}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$, como $n > 0$, então $x > 0$, ou seja, 0 é de fato uma cota inferior para A.

Agora temos de mostrar que 0 é a maior das cotas inferiores.

Assuma que exista $q \in \mathbb{R}$ tal que $q > 0$ e q seja uma cota inferior para A. Então devemos ter:

$$0 < q < 1$$

Pela propriedade arquimediana em $\mathbb{R}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que

$$mq > 1$$

ou seja, $q > \frac{1}{m}$. Mas $\frac{1}{m} \in A$, logo q não pode ser

maior do que $\frac{1}{m}$, contradição.

Assim 0 é a maior das cotas inferiores para A, ou seja, $\inf A = 0$.

⑥ $E \times E = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,0), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3) \}$.

Existem várias possíveis relações de equivalência. A mais trivial é

$$R = \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3) \}$$

Vamos mostrar que R satisfaz as propriedades reflexivas,

~~Reflexiva~~ simétrica e transitiva.

i) Reflexiva: $\forall x \in E, xRx$.

De fato, como todos os pares $(a, a) \in R$ com $a \in E$, então $\forall a \in E, aRa$.

ii) Simétrica.

Se xRy então yRx .

Como todo par de R é da forma (a, a) então evidentemente $aRa \rightarrow aRa$ e a propriedade é verdadeira.

iii) Transitiva.

Se xRy e yRz então xRz .

$$0R0 \text{ e } 0R0 \rightarrow 0R0$$

$$1R1 \text{ e } 1R1 \rightarrow 1R1$$

$$2R2 \text{ e } 2R2 \rightarrow 2R2$$

$$3R3 \text{ e } 3R3 \rightarrow 3R3$$

A propriedade é válida.

Para determinar E/R :

$$\overline{0} = \{x \in E / xR0\} = \{0\}$$

$$\overline{1} = \{1\}, \overline{2} = \{2\}, \overline{3} = \{3\}$$

$$E/R = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$