

Introdução ao Cálculo- Prova 2-2014

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Classifique cada afirmação abaixo em verdadeira ou falsa. Justifique adequadamente sua resposta:

1,0 a. A soma de dois números irracionais resulta num número irracional.

1,0 b. O inverso de um número irracional é um número irracional.

2,0 2. Determine $\sup\{\frac{2n+1}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$ (em $\mathbb{R}$). Justifique de forma rigorosa sua resposta.

3. Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

2,0

$$|2x - 6| - |x| \leq 4 - x.$$

4. Uma companhia telefônica possui 10.000 usuários que pagam uma taxa básica de R\$15,00 por mês. A companhia resolveu fazer uma promoção durante alguns meses diminuindo R\$0,25 do valor da taxa a cada mês. Observou-se que a cada desconto de R\$0,25 no preço da taxa, 200 novos usuários utilizaram os serviços da telefônica. Denote por $M(x)$ o valor arrecadado pela telefônica após x meses da promoção.

2,0 a. Encontre uma expressão para $M(x)$ para todo $x \in [0, +\infty[$.

Bônus b. Represente $M : [100, 120] \rightarrow \mathbb{R}$ graficamente.

Bônus c. Encontre o número de usuários para os quais $M(x)$ assume seu maior valor.

2,0 5. Encontre o domínio natural e represente graficamente a função $f(x) = \frac{2x^2 - |x|}{x}$.

Resolução P2 - Introdução ao Cálculo - Prof. Luciano Bedim 2024/02

1) a) Falso. De fato $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são irracionais e $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

b) Se $a \in \mathbb{Q}^*$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

De fato, por absurdo, admita que $a \cdot b = c$ com $c \in \mathbb{Q}$, então $b = \frac{c}{a}$. Como $\mathbb{Q}$ é um corpo tem-se $\frac{c}{a} \in \mathbb{Q}$ e $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, o que contradiz $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Agora seja $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $x \cdot \frac{1}{x} = 1$,

se $\frac{1}{x}$ fosse racional $x \cdot \frac{1}{x}$ seria racional

pelos resultados acima. Então $x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e a afirmação é verdadeira.

2) Provemos que $\sup \left\{ \frac{2n+1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} = 2$.

Se $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+2-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$,

logo 2 é cota superior do conjunto.

Seja $\alpha < 2$, pela propriedade arquimedeana, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \cdot (2 - \alpha) > 1$. Logo $\alpha < \frac{2N+1}{N+1} < 2$ e portanto

2 é a menor das cotas superiores, o que prova o resultado.

3) Caso 1: $x \leq 0$

$$-(2x-6) + x \leq 4-x \Leftrightarrow 6 \leq 4$$

$$S_1 = \emptyset$$

Caso 2: $0 < x \leq 3$

$$-(2x-6) - x \leq 4-x \Leftrightarrow -2x \leq -2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

$$S_2 = [1, 3]$$

Caso 3: $x \geq 3$

$$2x-6-x \leq 4-x \Leftrightarrow x \leq 5$$

$$S_3 =]3, 5]$$

Sol. final: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, 5]$

4) a)

N_{os}	Valor anecadado
0	10.000×15
1	$10.000 \times (15 - 0,25) + 200 \times (15 - 0,25)$
2	$10.000 \times (15 - 2.0,25) + 200 \times (15 - 2.0,25)$ $+ 200 \times (15 - 2.0,25)$ $= 10.000 \times (15 - 2.0,25) + 2. [200 \times (15 - 2.0,25)]$
3	$10.000 (15 - 3.0,25) + 2 [200 \times (15 - 3.0,25)] + 200 \times (15 - 3.0,25)$ $= 10.000 (15 - 3.0,25) + 3. [200 \times (15 - 3.0,25)]$

Generalizando essa ideia, no mês x temos:

$$M(x) = 10.000(15 - x \cdot 0,25) + x \cdot [200(15 - x \cdot 0,25)]$$

ou

$$M(x) = [10.000 + 200x](15 - 0,25x)$$

$$b) M(x) = 100 [1500 - 25x + 30x - 0,5x^2]$$

$$M(x) = 100 \cdot [1500 + 5x - 0,5x^2]$$

$$a = -50$$

$$b = 500$$

$$c = 150.000$$

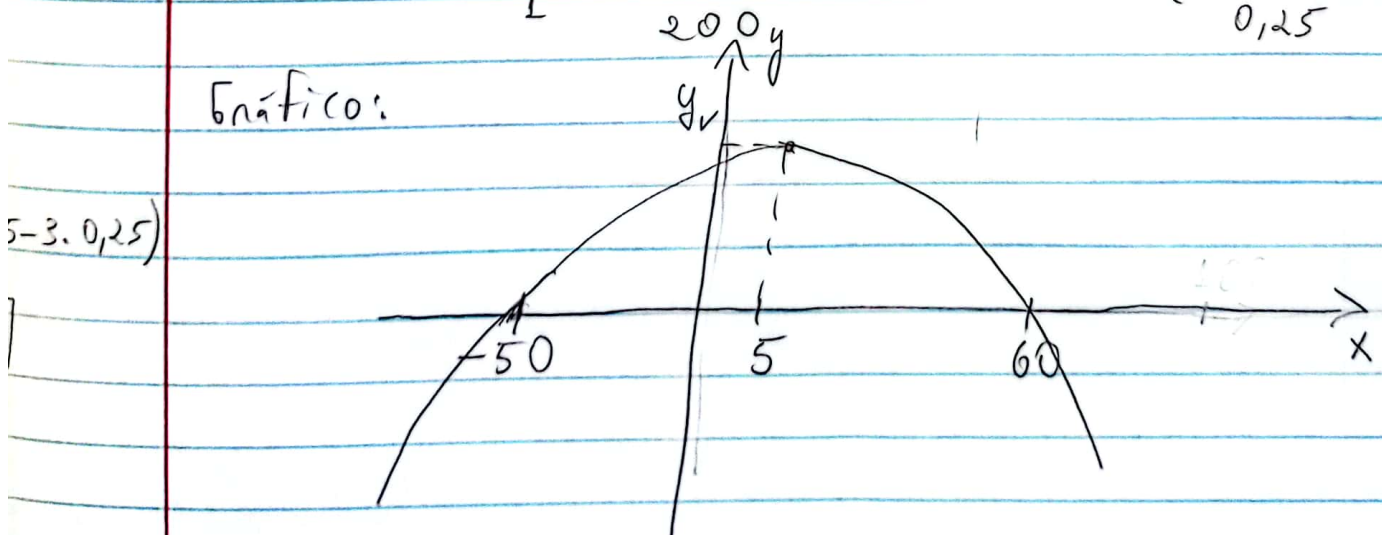
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{500}{100} = 5$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = - \frac{[(500)^2 - 4 \cdot (-50) \cdot 150.000]}{-4 \cdot 50}$$

$$y_v = \frac{(500)^2}{200} + 150.000$$

$$\text{Raízes: } x_1 = \frac{-10.000}{1} = -50 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{15}{0,25} = 60$$

Gráficos:



c) $M(x)$ assume seu valor máximo quando $x=5$

Mês 1 $\rightarrow 10.200$ usuários

Mês 2 $\rightarrow 10.400$ "

Mês 5 $\rightarrow 10.000 + 5.200 = 11.000$ usuários

5) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x}{x} = 2x - 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{2x^2 + x}{x} = 2x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

