

Introdução ao Cálculo- Prova 3-2014/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Resolva as seguintes inequações:

1,75 a. $\frac{x+5}{3x+2} \leq \frac{x-2}{3x+5}$

1,75 b. $\sqrt{2x-1} > x-2$

2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se } x \geq 2 \\ 2x - 1 & \text{se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$.

1,0 a. Use a representação gráfica de f para mostrar que f tem inversa.

1,5 b. Encontre f^{-1} .

1,0 c. Represente graficamente f e f^{-1} num mesmo sistema cartesiano.

3. Sejam as funções reais g e $f \circ g$ definidas por $g(x) = 2x - 3$ e

2,0
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 4x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Obtenha a lei que define f .

1,0 4. Mostre através de um exemplo que a composta de uma injeção com uma sobrejeção pode não ser nem injetora e nem sobrejetora.

Resolução Prova III - Introdução ao Cálculo

Prof. Luciano Bedim

① a) $\frac{x+5}{3x+2} \leq \frac{x-2}{3x+5} \Leftrightarrow \frac{x+5}{3x+2} - \frac{x-2}{3x+5} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+5)(3x+5) - (x-2)(3x+2)}{(3x+2)(3x+5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 5x + 15x + 25 - 3x^2 - 2x + 6x + 4}{(3x+2)(3x+5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{24x + 29}{(3x+2)(3x+5)} \leq 0$$

$f(x) = 24x + 29$

-		-		+		+
			-29			

$g(x) = 3x + 2$

-		-		+		+
		24				

$h(x) = 3x + 5$

-		+		+		+
	-5/3				-2/3	

Resultado

-----	-----	-----
-5/3	-29/24	-2/3

Solução: $]-\infty, -5/3[\cup [-29/24, -2/3[$

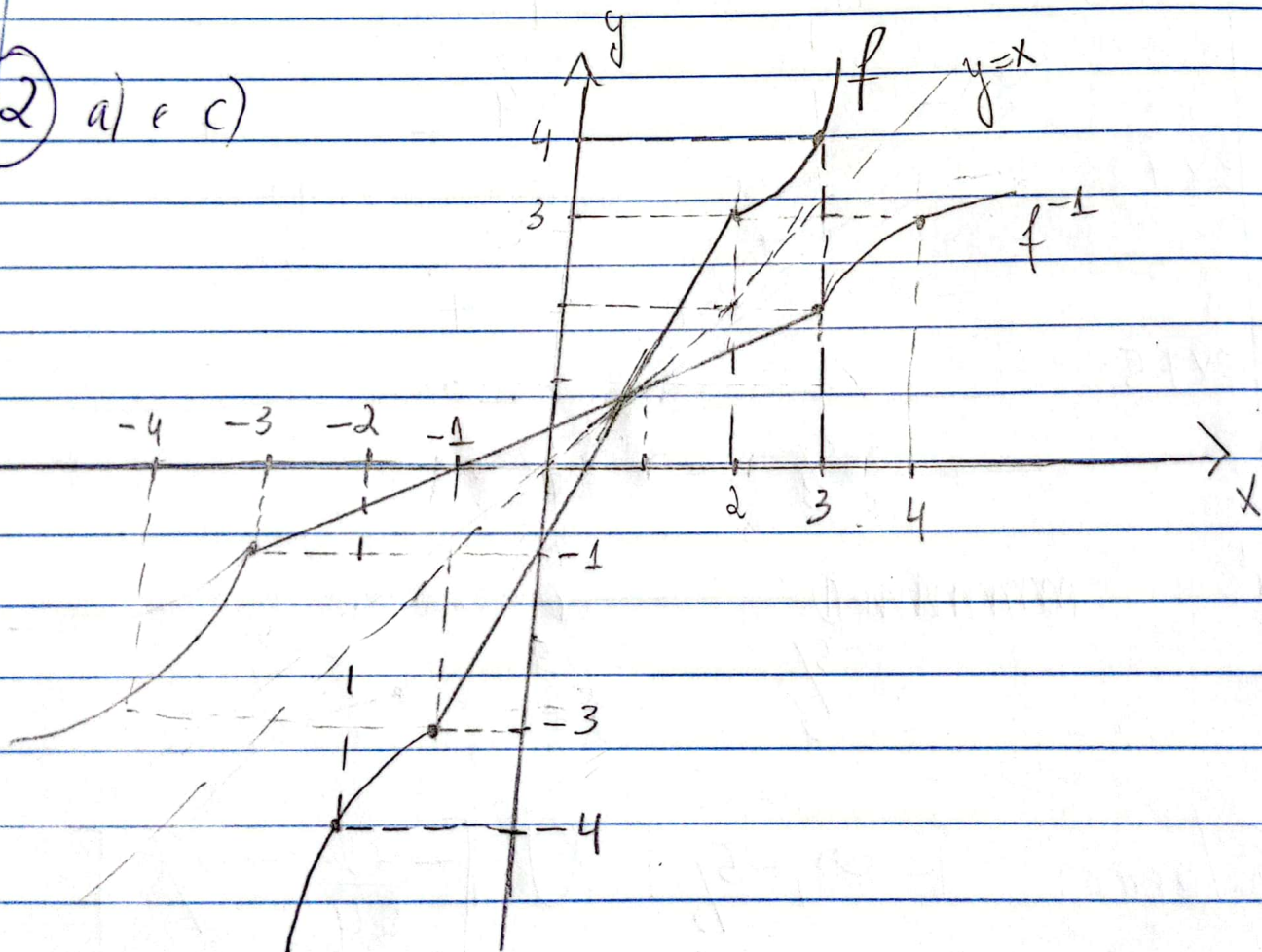
$$b) \sqrt{2x-1} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 & \text{e} & x-2 < 0 \\ \text{ou} & & \\ 2x-1 > (x-2)^2 & \text{e} & x-2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} & \text{e} & x < 2 \\ \text{ou} & & \\ x-6x+5 < 0 & \text{e} & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ \text{ou} & \\ 1 < x < 5 & \text{e} & x \geq 2 \end{cases}$$

Solução: $[\frac{1}{2}, 2[\cup [2, 5[= [\frac{1}{2}, 5[$

(2) a) e c)



$$b) \quad y = x^2 - 4x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + (7 - y) = 0$$

$$\text{Isso nos dá } x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 4(7 - y)}}{2}$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 4(7 - y)}}{2}, \text{ e como}$$

$x \geq 2$ devemos escolher

$$x = \frac{4 + \sqrt{16 - 4(7 - y)}}{2} = \frac{4 + \sqrt{4y - 12}}{2}$$

$$\boxed{x = 2 + \sqrt{y - 3}}$$

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{y+1}{2}}$$

$$y = -x^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 + y = 0$$

Isso nos dá

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4(4 + y)}}{2} \text{ ou}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 4(4 + y)}}{2} \text{ . Como } x \leq -1, \text{ devemos}$$

escolher

$$x = \frac{-2 - \sqrt{4 - 4(4 + y)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{4 - 16 - 4y}}{2}$$

$$\boxed{x = -1 - \sqrt{-y - 3}}$$

Logo

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x-3} & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ -1 - \sqrt{-x-3} & \text{se } x \leq -3 \end{cases}$$

$$(3) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 4 \cdot \left(\frac{g(x)+3}{2} \right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{g(x)+3}{2} \right) - 1 & \text{se } \frac{g(x)+3}{2} \geq 1 \\ 4 \left(\frac{g(x)+3}{2} \right) + 3 & \text{se } \frac{g(x)+3}{2} < 1 \end{cases}$$

pois $x = \frac{g(x)+3}{2}$, portanto,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} g(x)^2 + 3g(x) - 1 & \text{se } g(x) \geq -1 \\ 2g(x) + 9 & \text{se } g(x) < -1 \end{cases}$$

e portanto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{se } x \geq -1 \\ 2x + 9 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

(4) Tome $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ que é injetora

e $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, $g(x) = x^2$ que é sobrejetora

Mas $(f \circ g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $(f \circ g)(x) = |x|$

que não é injetora e nem sobrejetora.