

Introdução ao Cálculo- Prova 4-2014/02

Prof. Luciano Bedin

Nome:

1. Represente graficamente cada função abaixo:

a. $f(x) = 2 \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$.

b. $f(x) = -\arccos(-3x) - 1$

2. Encontre o domínio, imagem e a inversa de cada função abaixo. Represente graficamente num mesmo sistema cartesiano f e f^{-1} :

a. $f(x) = \frac{2}{3} \ln(x+5) + 1$

b. $f(x) = -2^{1-x}$

3. Resolva a inequação

$$\log_4(8x) - \log_2(\sqrt{x-1}) - \log_2(2x-1) \leq 1.$$

4. Calcule:

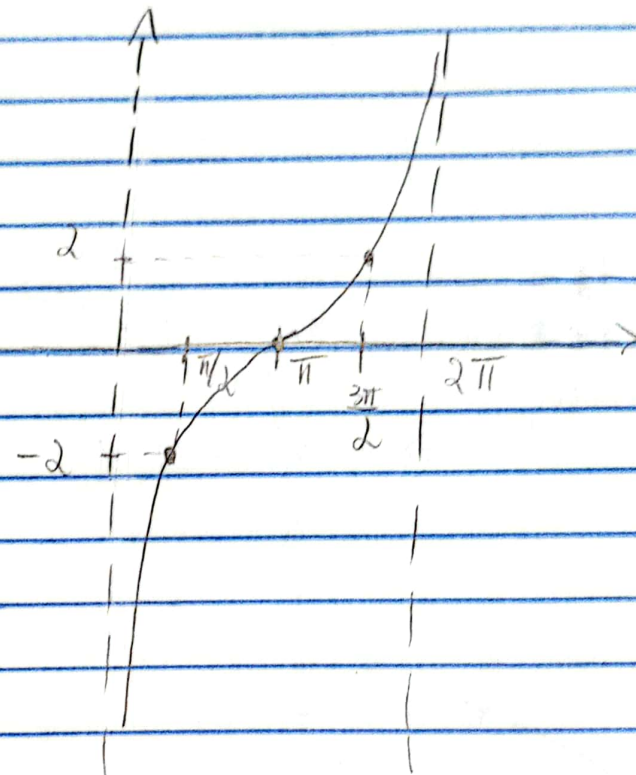
a. $\sec(\arctan(2))$

b. $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

Prova 4 - Int. 90 (atido - 2014/02)

1) a) $f(x) = 2 \cot g\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 2 \cot g\left(-\frac{x}{2}\right) = -2 \cot g\left(\frac{x}{2}\right)$

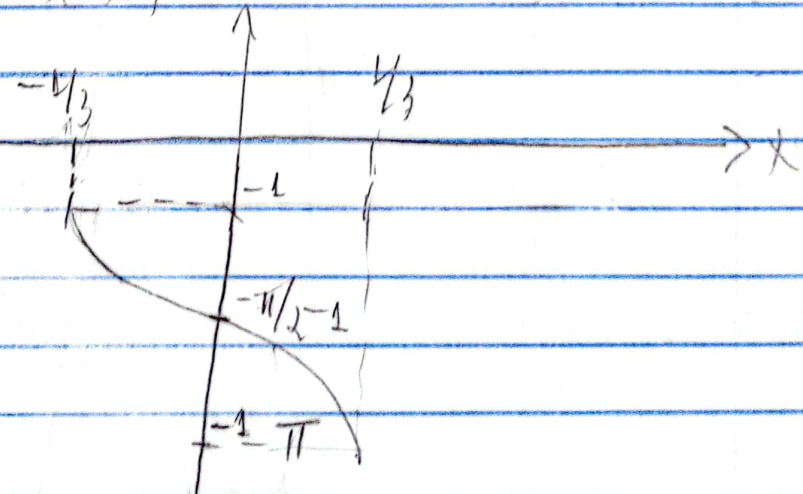
$\cot g(x)$ $\xrightarrow{\text{Alongamento horizontal}}$ $\cot g\left(\frac{x}{2}\right)$ $\xrightarrow{\text{Alongamento vertical}}$ $2 \cot g\left(\frac{x}{2}\right)$ $\xrightarrow{\text{Reflexão em x}}$ $-2 \cot g\left(\frac{x}{2}\right)$



b) $f(x) = -\arccos(-3x) - 1$

$\arccos(x)$ $\xrightarrow{\text{Compressão vertical}}$ $\arccos(3x)$ $\xrightarrow{\text{Reflexão em y}}$ $\arccos(-3x)$

$\xrightarrow{\text{Reflexão em x}}$ $- \arccos(-3x)$ $\xrightarrow{\text{Translação vertical}}$ $- \arccos(-3x) - 1$



2a) $D(f) =]-5, +\infty[$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

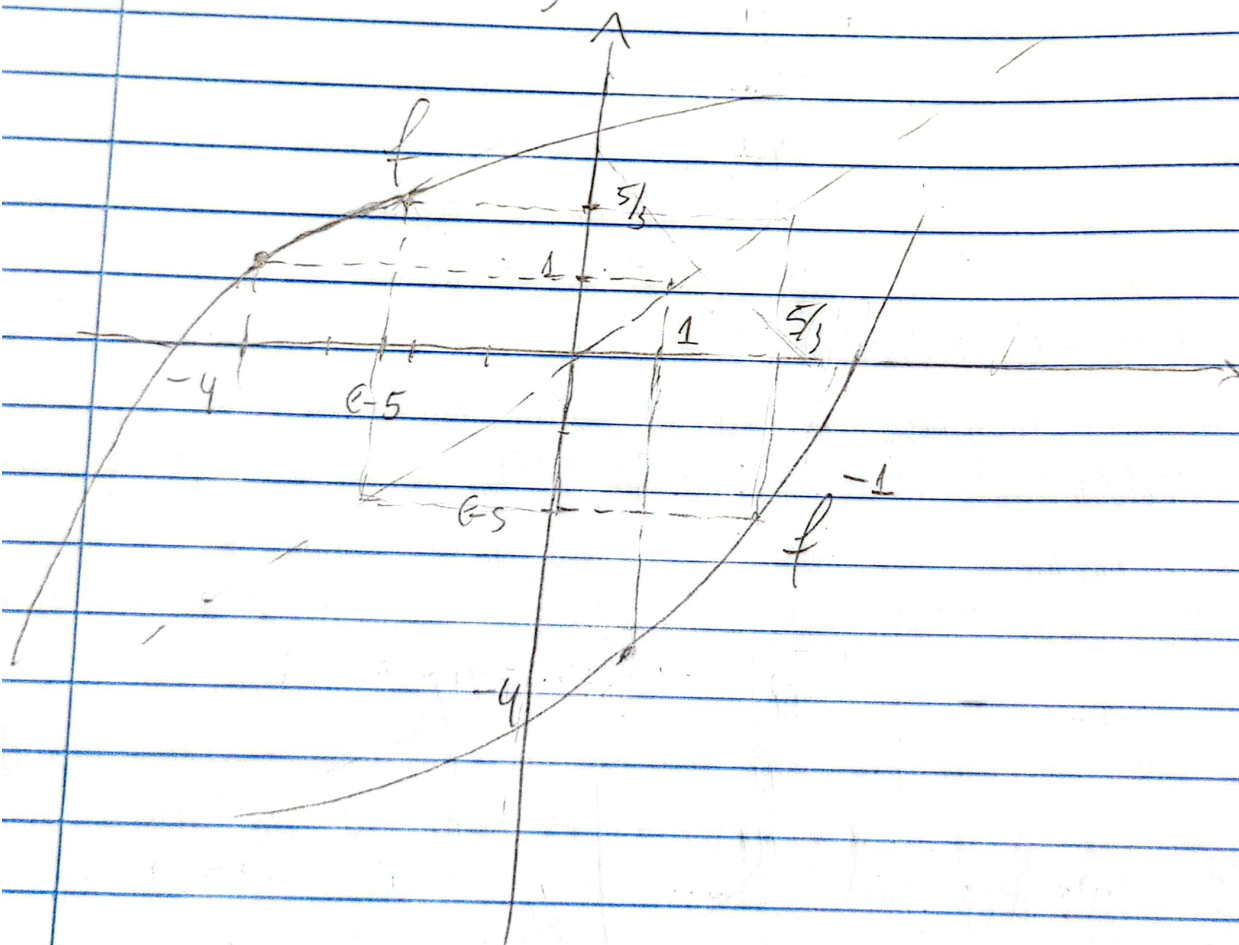
$$y = \frac{2}{3} \ln(x+5) + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(y-1) = \ln(x+5) \Leftrightarrow x+5 = e^{\frac{3}{2}(y-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 + e^{\frac{3}{2}(y-1)}$$

A inversa da função é $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-5, +\infty[$
 dada por $f^{-1}(x) = -5 + e^{\frac{3}{2}(x-1)}$

$\ln(x)$ $\xrightarrow[\text{horizontal}]{\text{translação}}$ $\ln(x+5)$ $\xrightarrow[\text{vertical}]{\text{compressão}}$ $\frac{2}{3} \ln(x+5)$

$\xrightarrow[\text{vertical}]{\text{translação}}$ $\frac{2}{3} \ln(x+5) + 1$



$$b) D(f) = \mathbb{R} \quad \text{Im}(f) =]-\infty, 0[$$

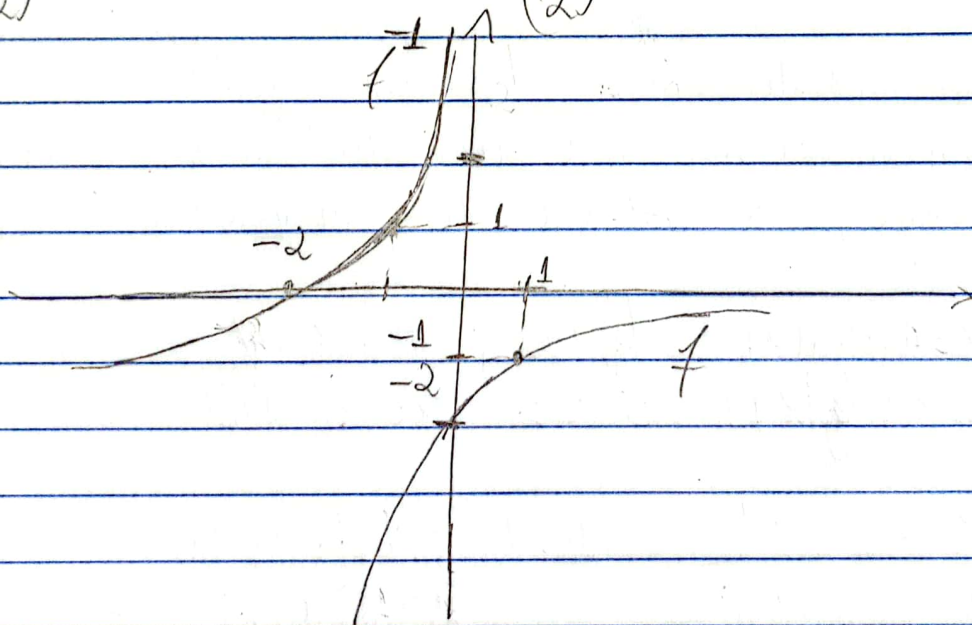
$$y = -2^{1-x} \iff -y = 2^{1-x} \iff \log_2(-y) = 1-x$$

$$\iff x = 1 - \log_2(-y)$$

$$\text{Assim } f^{-1}:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = 1 - \log_2(-x)$$

$$f(x) = -2^{1-x} = -[2 \cdot 2^{-x}] = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow[\text{horiz.}]{\text{Alongamento}} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow[\text{Reflexão em } x]{\text{Reflexão em } x} -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



$$3) \frac{\log_2 8x}{\log_2 4} - \log_2 \sqrt{x-1} - \log_2 (2x-1) \leq 1 \iff$$

$$\log_2 \frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{x-1}(2x-1)} \leq 1 \quad \in \quad \begin{matrix} 8x > 0, \\ x-1 > 0, \quad 2x-1 > 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{x-1} \sqrt{2x-1}} \leq 2 \quad e \quad x > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{(x-1)(2x-1)^2} \leq 4 \quad e \quad x > 1 \quad \Leftrightarrow 2x \leq (x-1) \cdot (2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq (x-1)(4x^2 - 4x + 1) \quad e \quad x > 1 \quad \Leftrightarrow 2x \leq 4x^3 - 4x^2 + x - 4x^2 + 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1 \geq 0 \quad e \quad x > 1$$

Para $x=1$, $4 - 8 + 3 - 1 = -2$

Para $x=2$, $4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 32 - 32 + 5 = 5$

Então existe x^* tal que $4(x^*)^3 - 8(x^*)^2 + 3x^* - 1 = 0$
É possível provar que não há outras raízes reais.

Logo, a solução da inequação é $]x^*, +\infty[$

4) a) $\alpha = \arctan(2) \Rightarrow \tan \alpha = 2$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 $\sec^2 \alpha = \tan^2 \alpha + 1 = 5 \Rightarrow \sec \alpha = \sqrt{5}$

b) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}$

$$= 2 \left[\frac{1 \cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{2} \right] \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin 20^\circ}{2} \right)}$$

$$= 4 \cdot \left[\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ \right] = 4 \frac{\sin (30^\circ - 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = 4$$