Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 03

1. Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios em uma variável com coeficientes reais. Denote por $\mathcal{P}_+$ e $\mathcal{P}_-$ o conjunto dos polinômios com coeficiente de mais alto grau positivo e negativo, respectivamente. Mostre que estes conjuntos são convexos e que não podem ser separados por um hiperplano.

2. Seja X um e.v.n. de dimensão infinita, $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ e $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. Prove que o fecho de S_X na topologia $\sigma(X, X^*)$ é igual a B_X. Conclua que S_X não é fechado fraco de X. Prove ainda que $B_X^0 = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ não pertence a $\sigma(X, X^*)$ e não contém pontos interiores nessa topologia.

3. Seja X um espaço localmente convexo e $C \subset X$ um conjunto absorvente e convexo. Mostre que se C é aberto, então
$$C = \{x \in X \mid \rho_C(x) < 1\},$$
onde ρ_C denote o funcional de Minkowski de C.

4. Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Mostre que qualquer aberto não-vazio da topologia $\sigma(X, X^*)$ tem elementos de norma arbitrariamente grande. Conclua que $\|\cdot\|$ não é contínua na topologia $\sigma(X, X^*)$.

5. Seja X um espaço de Banach e X^* o seu dual. Considere X e X^* como espaços localmente convexos munidos com as topologias fraca $\sigma(X, X^*)$ e fraca-$*$ $\sigma(X^*, X)$, respectivamente. Sejam f e g funcionais lineares tomando valores em X e X^*, respectivamente. Mostre que
   (a) f é contínuo na topologia $\sigma(X, X^*)$ se e somente se $f \in X^*$.
   (b) g é contínuo na topologia $\sigma(X^*, X)$ se e somente se existe $x \in X$ tal que $g = J(x)$, onde J denota a aplicação canônica. Dica: use o Exercício 5 da Lista 1.