Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 5

1. Seja X um espaço de Banach real e $f : X \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa e semicontínua inferiormente (na topologia forte de X). Mostre que existe $x^* \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq \langle x, x^* \rangle + \beta \qquad \forall x \in X,$$

onde $\langle x, x^* \rangle := x^*(x)$. Dica: considere o *epigrafo* epi$f := \{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R} \mid \mu \geq f(x)\}$ de f, mostre que epi$f$ é convexo e fechado e use algum teorema de separação de convexos.

2. Seja X um espaço vetorial normado. Use a injeção canônica $J : X \to X^{**}$ para mostrar que X é linearmente isométrico a um subespaço denso de um espaço de Banach.

3. Seja X um e.v.n. e $S \subset X$. Mostre que S é limitado se e somente se $f(S)$ é limitado para todo $f \in X^*$.

4. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um e.v.n. e $(X^*, \|\cdot\|_*)$ o seu dual. Mostre que $\|\cdot\|$ é semicontínua inferiormente na topologia $\sigma(X, X^*)$. Mostre que o mesmo resultado é válido para $\|\cdot\|_*$ com respeito a topologia $\sigma(X^*, X)$.