Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 8

1. Seja X um e.v.n. e $C \subset X$ um subespaço vetorial. Diz-se que $c \in C$ é uma *melhor aproximação* de $x \in X$ em C quando
$$\|x - c\| \leq \|x - y\| \qquad \forall y \in C.$$
   (a) Mostre a existência de melhor aproximação em qualquer uma das condições abaixo:
      (i) $\dim C$ é finita.
      (ii) X é um espaço de Banach reflexivo e C é fechado.
   (b) Mostre que se $\| \cdot \|$ é estritamente convexa, então existe no máximo uma melhor aproximação.
   (c) Mostre que o conjunto formado por todas as melhores aproximações é um conjunto convexo.

2. Sejam u e v funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\theta \in \mathbb{Z}_+$. Mostre que $u.v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $x^\theta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x) = e^{-x^2/2}$. Use o Teorema de Picard-Lindelöf (de existência e unicidade de soluções para EDOs) para mostrar que $\widehat{G} = G$. Dica: compute a derivada de G e use as propriedades da Transformada de Fourier com relação a derivadas.

4. Mostre que se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $\check{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.