Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 1

1. Seja X um espaço topológico e $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência em X convergindo para $x \in X$. Mostre que o conjunto $\{x_n\}_{n\geq 0} \cup \{x\}$ é compacto.

2. Um espaço topológico é *primeiro contável* se todos os seus pontos possuem uma base de vizinhanças enumerável. Um espaço topológico é *segundo contável* se ele possui uma base (de abertos) enumerável. Um espaço topológico é *separável* se ele possui um subconjunto enumerável denso.
   (a) Mostre que todo espaço topológico segundo contável é separável.
   (b) Mostre que todo espaço segundo contável é primeiro contável. Construa um exemplo mostrando que a recíproca dessa implicação não vale. Dica: considere $\mathbb{R}$ com a topologia discreta.

3. Seja $X = [0, 1]$ e considere a topologia em X tal que os seus abertos (não-vazios) são aqueles subconjuntos de X cujo complementar é no máximo enumerável. Seja $A = [0, 1)$. Mostre que $\overline{A} = X$ e que não existe sequência em A convergindo para 1.

4. Dê um exemplo de uma rede convergente mas não limitada.

5. Mostre que todo subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.

6. Seja X um espaço topológico. Mostre que $x \in X$ é ponto aderente de uma rede (x_α) se e somente se existe uma subrede de (x_α) que converge para x.

7. Mostre o Teorema de Bolzano-Weierstrass, isto é, mostre que um espaço topológico X é compacto se e somente se toda rede em X possui subrede convergente.

8. Mostre que a imagem direta de um espaço compacto por uma função contínua é compacto.

9. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$. Mostre que f é contínua em $x \in X$ se e somente se $f(x_\alpha) \to f(x)$ para toda rede x_α convergindo para x.

10. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Mostre que se $Y \subset X$ é compacto, então Y é fechado.

11. Seja X um espaço topológico Hausdorff. Mostre a unicidade do limite para redes em X.