Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 2

1. Mostre que um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se o seu dual X^* é reflexivo.

2. Seja X um espaço localmente convexo munido com uma família de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in L}$ e

$$V = V(x_0, \rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_k}, \varepsilon) = \{x \in X \;\mid\; \rho_{\alpha_i}(x - x_0) < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k\}$$

uma vizinhança de $x_0 \in X$. Dado $y \in V$, construa (explicitamente) uma vizinhaça

$$W = W(y, \rho_{\beta_1}, \rho_{\beta_2}, \ldots, \rho_{\beta_\ell}, \delta) = \{x \in X \;\mid\; \rho_{\beta_i}(x - y) < \delta, \quad i = 1, \ldots, \ell\}$$

de y tal que

$$W \subset V.$$

3. Seja X um e.v.n. e sejam $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ funcionais lineares em X. Mostre que são equivalentes:

   (a) Existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

   $$f_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, f_j$$

   (b) Existe $c > 0$ tal que

   $$|f_0(x)| \leq c \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x)|, \quad \forall x \in X$$

   (c) $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{N}(f_j) \subset \mathrm{N}(f_0)$,

   onde $\mathrm{N}(f_i)$ denote o núcleo de f_i $(0 \leq i \leq n)$.

4. Seja X um espaço localmente convexo real e $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $f \neq 0$. Mostre que se $A \subset X$ é aberto, então $f(A)$ é aberto.