Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 3

1. Seja X um espaço vetorial, sejam C e D subconjuntos de X e $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina $C + D = \{c + d \mid c \in C \text{ e } d \in D\}$ e $\lambda C = \{\lambda c \mid c \in C\}$. Mostre que $C + D$ e λC são convexos se C e D forem convexos.

2. Seja X um espaço vetorial e $C \subset X$ um conjunto convexo. Mostre que
$$\lambda C + \mu C = (\lambda + \mu)C, \qquad \forall \lambda, \mu > 0.$$

3. Seja X um e.v.n. e $A \subset X$. Mostre que se A é aberto, então $\operatorname{conv} A$ é aberto.

4. Mostre que se $S \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então $\operatorname{conv} S$ é compacto. Dica: Use o Teorema de Caratheodóry.

5. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Mostre que $\overline{\operatorname{conv} S} = \operatorname{conv} \overline{S}$.

6. Seja X um espaço vetorial e $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família totalmente ordenada de subconjuntos de X. Mostre que se $S \subset \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, então
$$\operatorname{conv} S \subset \bigcup_{\alpha \in I} \operatorname{conv} S_\alpha.$$

7. Seja X um e.v.n. e $S \subset X$ tal que
$$\emptyset \neq \operatorname{int} \overline{\operatorname{conv} S} \subset \operatorname{int} S.$$
Mostre que:
   (a) $\operatorname{int} S = \operatorname{int} \overline{\operatorname{conv} \operatorname{int} S} = \operatorname{int} \overline{\operatorname{conv} S}$.
   (b) $\operatorname{int} S$ é convexo.
   (c) $\overline{\operatorname{int} S} = \overline{\operatorname{conv} S} = \overline{S}$.

8. Seja X um e.v.n. e sejam $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Mostre que

$$\operatorname{conv} S[x_0, \varepsilon] = B[x_0, \varepsilon],$$

onde $S[x_0, \varepsilon] := \{x \in X \ \mid \ \|x - x_0\| = \varepsilon\}$ e $B[x_0, \varepsilon] := \{x \in X \ \mid \ \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$.