Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 4

1. Seja X um espaço vetorial e sejam $f_i : X \to \mathbb{R}$ funções convexas $(1 \leq i \leq k)$. Mostre que, para $p \geq 1$, a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\max\{0, f_i(x)\}\right)^p, \qquad x \in X,$$

   é convexa.

2. Seja X um espaço vetorial. Uma função $f : X \to (-\infty, \infty]$ diz-se *quase-convexa* se $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ e

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \qquad \forall x, y \in \operatorname{dom} f,\ \forall \lambda \in (0,1).$$

   Mostre que f é quase-convexa se e somente se o conjunto de nível $\{x \in X \mid f(x) \leq \mu\}$ é convexo para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Seja X um espaço vetorial e sejam C e D subconjuntos convexos e não-vazios de X. Seja $\varphi : C \times D \to \mathbb{R}$ uma função convexa tal que $\inf_{y \in D} \varphi(x, y) > -\infty$. Mostre que $f : C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \inf_{y \in D} \varphi(x, y)$ é convexa.

4. Seja X um e.v.n. e $p \geq 1$. Mostre que $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$ é convexa.