Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 5

1. Mostre que $g = f^*$ em cada item abaixo.

   (a)
$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{x^2}{4}.$$

   (b)
$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x < 0, \\ x(\ln x - 1), & x > 0. \end{cases}$$

   (c)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ \infty, & x \leq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \infty, & x > 0, \\ -2\sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

   (d)
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0, \\ \infty, & x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \infty, & x > -1. \end{cases}$$

2. Considere $g, f : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ definidas como $g(x) = \delta_{\{1\}}(x)$ e
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0, \\ \infty, & x < 0. \end{cases}$$
   Mostre que
$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \{f(x) + g(x)\} = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{-f^*(-y) - g^*(y)\} = -1.$$

3. Seja X um espaço de Banach *reflexivo*, $f : X \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa (própria) e semicontínua inferiormente (na topologia forte de X) e $z \in X$. Mostre que existe uma única solução para o problema de minimização
$$\min_{x \in X} \left\{ f(x) + \frac{1}{2}\|x - z\|^2 \right\}.$$

4. Seja X um espaço *reflexivo* e $h : X \times X^* \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa (própria) e semi-contínua inferiormente. Seja $h^* : X^* \times X \to -(\infty, \infty]$ a sua conjugada de Fenchel e suponha que
$$\min\big\{h(x,x^*), h^*(x^*,x)\big\} \geq \langle x, x^*\rangle, \qquad \forall (x,x^*) \in X \times X^*.$$
Mostre que existe um único $(z, z^*) \in X \times X^*$ tal que
$$\inf_{(x,x^*)\in X\times X^*} \left\{h(x,x^*) + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x^*\|^2\right\} = h(z,z^*) + \frac{1}{2}\|z\|^2 + \frac{1}{2}\|z^*\|^2 = 0.$$

5. Seja X um e.v.n. e $g : X \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa (própria) e s.c.i. Para $(y, y^*) \in X \times X^*$, defina $f : X \to (-\infty, \infty]$ como
$$f(x) = g(x) - g(y) - \langle x - y, y^*\rangle, \qquad \forall x \in X.$$
Mostre que f é convexa (própria), s.c.i. e que
$$f^*(x^*) = g^*(x^* + y^*) + g(y) - \langle y, y^*\rangle, \qquad \forall x^* \in X^*.$$

6. Seja X um e.v.n. e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função afim, isto é, $f(x) = \langle x, y^*\rangle - \beta$, onde $y^* \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Mostre que
$$f^*(x^*) = \delta_{\{y^*\}}(x^*) + \beta, \qquad \forall x^* \in X^*.$$

7. Seja X um e.v.n. e $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{p}\|x\|^p$, onde $p > 1$. Mostre que, para todo $x^* \in X^*$, tem-se $f^*(x^*) = \dfrac{1}{q}\|x^*\|^q$, onde $q = p/(1-p)$.

8. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (real) com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ e norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot\rangle}$. Defina a *conjugada de Fenchel* da função própria $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ como $f^* : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$, $f^*(u) := \sup_{x\in\mathcal{H}}\{\langle x, u\rangle - f(x)\}$, para $u \in \mathcal{H}$. Mostre que
$$f = f^* \iff f = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2.$$

9. Seja X um e.v.n. e $f : X \to (-\infty, \infty]$ uma função própria e *homogênea positiva*, isto é, f é tal que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in X$ e $\lambda \geq 0$. Mostre que
$$f^*(x^*) = \delta_\Omega(x^*), \qquad \forall x^* \in X^*.$$
onde $\Omega := \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^*\rangle \leq f(x) \quad \forall x \in X\}$.

10. Seja X um e.v.n. e $f, g : X \to (-\infty, \infty]$ tais que $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$. Mostre que
$$(f+g)^* \leq f^* \Box g^*.$$