Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 6

1. Seja X um e.v.n. e seja $f : X \to (-\infty, \infty]$ definida por $f(x) = \langle x, z^* \rangle + \beta$, onde $z^* \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Mostre que, para todo $\varepsilon \geq 0$, tem-se $\partial_\varepsilon f(x) = \{z^*\}, \quad \forall x \in X$.

2. Seja X um e.v.n., seja $f : X \to (-\infty, \infty]$ convexa (própria) e s.c.i. e $x \in \operatorname{dom} f$. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$.

3. Seja X um e.v.n. Mostre que

$$\partial \| \cdot \| (x) = \begin{cases} B_{X^*}, & \text{se } \ x = 0, \\ \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| = 1 \text{ e } \|x\| = \langle x, x^* \rangle\}, & \text{se } \ x \neq 0. \end{cases}$$

   Mostre que se X é um espaço de Hilbert, então

$$\partial \| \cdot \| (x) = \begin{cases} B_X, & \text{se } \ x = 0, \\ \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}, & \text{se } \ x \neq 0. \end{cases}$$

4. Seja X um e.v.n. e $f : X \to (-\infty, \infty]$. Mostre que se $x \in \operatorname{Dom} \partial f$, então f é s.c.i. em x na topologia $\sigma(X^*, X)$.

5. Seja X um espaço vetorial e $f : X \to (-\infty, \infty]$. Mostre que, para todo $y \in X$, tem-se

$$\partial f(\cdot + y)(x) = \partial f(x + y).$$

6. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Mostre que

$$\partial \left(\frac{1}{2} \| \cdot \|^2 \right) = I.$$

7. Para $i = 1, \ldots, n$, sejam X_i espaços vetoriais normados, sejam $C_i \subset X_i$ conjuntos convexos não-vazios e $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$. Mostre que

$$N_C(x) = N_{C_1}(x_1) \times N_{C_2}(x_2) \times \cdots \times N_{C_n}(x_n), \quad \forall x \in X,$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $X := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.