Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 7

1. Sejam $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^2\}$ e $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ e sejam $f := \delta_C$ e $g := \delta_D$. Mostre que
$$\partial f(0,0) + \partial g(0,0) \subsetneq \partial (f+g)(0,0).$$

2. Seja X um espaço de Banach e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função s.c.i. e limitada inferiormente. Suponha que f é (Gâteaux) diferenciável em X. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que
   (i) $f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$.
   (ii) $\|f'(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$.

3. Use o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, isto é, para mostrar que toda contração num espaço métrico completo possui um único ponto fixo.

4. Seja X um espaço de Banach e $f : X \to (-\infty, \infty]$ convexa (própria) e s.c.i. Mostre que $\operatorname{Dom} \partial f$ é denso em $\operatorname{dom} f$. Dica: Use o Teorema de Bronsted-Rockafellar.