Análise Convexa - 2022.02

Prof. Maicon Marques Alves

Lista Avaliativa

1. Seja X um espaço topológico e $(x_n)_{n\geq 0}$ uma sequência em X convergindo para $x \in X$. Mostre que o conjunto $\{x_n\}_{n\geq 0} \cup \{x\}$ é compacto.

2. Seja $X = [0,1]$ e considere a topologia em X tal que os seus abertos (não-vazios) são aqueles subconjuntos de X cujo complementar é no máximo enumerável. Seja $A = [0,1)$. Mostre que $\overline{A} = X$ e que não existe sequência em A convergindo para 1.

3. Seja X um e.v.n. e sejam $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ funcionais lineares em X. Mostre que são equivalentes:

   (a) Existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que
   $$f_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, f_j$$

   (b) Existe $c > 0$ tal que
   $$|f_0(x)| \leq c \max_{1\leq j\leq n} |f_j(x)|, \quad \forall x \in X$$

   (c) $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{N}(f_j) \subset \mathrm{N}(f_0)$,

   onde $\mathrm{N}(f_i)$ denote o núcleo de f_i $(0 \leq i \leq n)$.

4. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. Mostre que $\overline{\operatorname{conv} S} = \operatorname{conv} \overline{S}$.

5. Seja X um espaço vetorial. Uma função $f : X \to (-\infty, \infty]$ diz-se *quase-convexa* se $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ e
   $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \qquad \forall x, y \in \operatorname{dom} f, \ \forall \lambda \in (0,1).$$
   Mostre que f é quase-convexa se e somente se o conjunto de nível $\{x \in X \mid f(x) \leq \mu\}$ é convexo para todo $\mu \in \mathbb{R}$.

6. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (real) com produto interno $\langle\cdot|\cdot\rangle$ e norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$. Defina a *conjugada de Fenchel* da função própria $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ como $f^* : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$, $f^*(u) := \sup_{x\in\mathcal{H}}\{\langle x|u\rangle - f(x)\}$, para $u \in \mathcal{H}$. Mostre que

$$f = f^* \iff f = \frac{1}{2}\|\cdot\|^2.$$

7. Seja X um e.v.n., seja $f : X \to (-\infty, \infty]$ convexa (própria) e s.c.i. e $x \in \operatorname{dom} f$. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$.

8. Use o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, isto é, para mostrar que toda contração num espaço métrico completo possui um único ponto fixo.

9. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável e $x, y \in \mathcal{H}$. Mostre que

$$\nabla f(y) \in \partial_\varepsilon f(x),$$

onde $\varepsilon := f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x)|y - x\rangle$.

10. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado e auto-adjunto. Mostre que $\langle Qx|x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ se se somente se

$$\langle Qx|x\rangle \geq \frac{1}{\|Q\|}\|Qx\|^2 \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$