Análise Convexa - 2022.02
Primeira Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1) (1.5 Pontos) V ou F, com prova ou contra-exemplo.

(a) Toda função convexa, s.c.i. e limitada inferiormente num espaço de Banach reflexivo possui minimizador.

(b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa e $g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ é convexa e s.c.i., então

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + g(x)\} = \max_{y \in \mathbb{R}^n} \{-f^*(-y) - g^*(y)\}.$$

(c) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \log(1 + e^x)$ é estritamente convexa.

2) (2.0 Pontos) Sejam X e Y espaços vetoriais normados, $f : X \to (-\infty, \infty]$ e $g : Y \to (-\infty, \infty]$ funções próprias e $L : X \to Y$ um operador linear limitado. Mostre que

$$\inf_{x \in X} \{f(x) + g(Lx)\} \geq \max_{y^* \in Y^*} \{-f^*(-L^* y^*) - g^*(y^*)\}.$$

3) (2.5 Pontos) Seja X um e.v.n. e $f : X \to (-\infty, \infty]$ uma função própria e *homogênea positiva*, isto é, f é tal que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in X$ e $\lambda \geq 0$. Mostre que

$$f^* = \delta_\Omega\,,$$

onde $\Omega := \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle \leq f(x) \quad \forall x \in X\}$.

4) (2.0 Pontos) Seja X um e.v.n. e $f : X \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa e s.c.i. Mostre que

$$\inf_{x \in X} \left\{ f(x) + \frac{1}{2}\|x\|^2 \right\} > -\infty.$$

5) (2.0 Pontos) Sejam A e B subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B.$$

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 07 de outubro de 2022.