Análise Convexa - 2022.02
Segunda Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1) (2.5 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert munido com a norma $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$. Mostre que

$$\partial\|\cdot\|(x) = \begin{cases} B_{\mathcal{H}}, & \text{se } \ x = 0, \\ \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}, & \text{se } \ x \neq 0. \end{cases}$$

2) (2.5 Pontos) Seja X um e.v.n. e seja $f : X \to (-\infty, \infty]$ definida por $f(x) = \langle x, z^* \rangle + \beta$, onde $z^* \in X^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Mostre que, para todo $\varepsilon \geq 0$, tem-se $\partial_\varepsilon f(x) = \{z^*\}, \quad \forall x \in X$.

3) (2.5 Pontos) Use o Princípio Variacional de Ekeland para mostrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, isto é, para mostrar que toda contração num espaço métrico completo possui um único ponto fixo.

4) (2.5 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável e suponha que ∇f é β-Lipschitz contínuo. Mostre que, para todo $x, y \in \mathcal{H}$, existe $\varepsilon \geq 0$ tal que

$$\nabla f(y) \in \partial_\varepsilon f(x), \qquad \varepsilon \leq \frac{\beta}{2}\|x - y\|^2.$$

Prof. Maicon Marques Alves

Florianópolis, 25 de novembro de 2022.