MTM3112 - Álgebra Linear
Sétima Lista

Prof. Maicon Marques Alves

1. Verifique que cada uma das operações abaixo define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$.
   (a) $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$
   (b) $\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$
   (c) $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$

2. Calcular o produto interno $\langle u, v \rangle$ nos casos (a), (b) e (c) do Exercício 1 para os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-3, 2)$.

3. Verifique quais das operações abaixo definem um produto interno em $\mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$.
   (a) $\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$
   (b) $\langle u, v \rangle = x_1^2x_2 + y_1y_2^2$
   (c) $\langle u, v \rangle = 4x_1x_2$
   (d) $\langle u, v \rangle = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$
   (e) $\langle u, v \rangle = 4x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$

4. Considere o produto interno $\langle p, q \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ em $\mathcal{P}_2$, onde $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcular:
   (a) $\langle p_1, p_2 \rangle$
   (b) $\|p_1\|$ e $\|p_3\|$
   (c) $\|p_1 + p_2\|$
   (d) $\dfrac{p_2}{\|p_2\|}$

5. Considere o seguinte produto interno em $M(2, 2)$ (matrizes 2×2):
$$\langle u, v \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$
   onde
$$u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$
   Dados os vetores (matrizes)
$$u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
   determine:

(a) $\|u\|$
(b) $\|v\|$
(c) $\|u+v\|$
(d) O ângulo θ entre u e v

6. No espaço das funções contínuas no intervalo $[0,1]$, considere o seguinte produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Calcule $\langle f, g\rangle$ e $\|f\|$ para $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x + 3$.

7. Verificar a validade da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para os seguintes casos:

    (a) $u = (2, -1)$ e $v = (-2, -4)$ com produto interno do Exercício 1(b).
    (b) $u = -x^2 + x - 3$ e $v = 3x^2 - x + 1$ com produto interno do Exercício 4.

8. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual. Em cada caso, termine um valor de m para que os vetores sejam ortogonais.

    (a) $u = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4, 1, 5)$
    (b) $u = (0, m-1, 4)$ e $v = (5, m-1, -1)$

9. Considere $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual. Determine um vetor de $\mathbb{R}^3$ que seja (simultaneamente) ortogonal aos vetores $u = (1, 1, 2)$, $v = (5, 1, 3)$ e $w = (2, -2, -3)$.

10. Determinar um vetor (a, b, c) para que o conjunto $\beta = \{(1, -3, 2), (2, 2, 2), (a, b, c)\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual. Construir a partir de β uma base ortonormal.

11. Considere o espaço $M(2, 2)$ com produto interno definido no Exercício 5. Determinar um valor de x para que os vetores

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sejam ortogonais.

12. Considere o seguinte produto interno em $\mathcal{P}_1$:

$$\langle p, q\rangle = 2ac + ad + bc + 2bd,$$

onde $p = ax + b$ e $q = cx + d$.

    (a) Calcule o ângulo entre os vetores $p = x - 1$ e $q = 3x$.

(b) Encontre um vetor r que seja ortogonal aos vetor $p = x - 1$.

13. Considere o seguinte produto interno em $\mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Mostre que relativamente ao produto interno acima, o conjunto $\alpha = \{(1,0), (2,-1)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

14. Determine o valor de k para que o conjunto $\beta = \{(2,-1), (k,1)\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Determine também uma base ortonormal a partir da base β.

Gabarito Parcial

2. (a) -1
   (b) 4
   (c) 0
3. (a) Sim
   (b) Não
   (c) Não
   (d) Sim
   (e) Sim
4. (a) -18
   (b) $\sqrt{14}$ e $\sqrt{2}$
   (c) $\sqrt{3}$
   (d) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$
5. (c) $\sqrt{21}$
   (d) $\theta = \arccos \frac{4}{\sqrt{42}}$
6. $-\frac{29}{12}$ e $\sqrt{\frac{8}{15}}$
8. (a) $\frac{2}{17}$
   (b) 3 ou -1
9. Qualquer múltiplo de $(1, 7, -4)$
10. $(a, b, c) = t(-5, 1, 4)$ para $t \neq 0$.
11. $x = 4$
12. (a) $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.
    (b) $r = t + 1$
14. $k = -\frac{1}{3}$