MTM3112 - Álgebra Linear
Quinta Lista

1. Toda matriz A de ordem $m \times n$ determina uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T_A(v) = Av$. Para cada matriz abaixo, encontre sua respectiva transformação linear.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.
   (a) Determine uma base para $N(T)$.
   (b) Dê a dimensão da imagem de T.
   (c) T é sobrejetora? Justifique.

3. Quando possível, dê exemplos de transformações lineares satisfazendo as seguintes condições:
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora.
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $N(T) = \{(0, 0, 0)\}$.
   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $Im(T) = \{(0, 0)\}$.
   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
   (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x\}$.

4. Seja $D_1 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $D_1(f) = f'$ (primeira derivada).
   (a) Verifique que D_1 é uma transformação linear.
   (b) Determine $N(D_1)$ e $Im(D_1)$ e encontre uma base para cada um desses subespaços.

5. Seja $D_2 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $D_2(f) = f''$ (segunda derivada). Verifique que D_2 é uma transformação linear e encontre uma base para $N(D_2)$.

6. Para cada uma das transformações lineares T abaixo, determine $N(T)$, uma base para esse subespaço e verifique se T é injetora. Além disso, determine $Im(T)$, uma base para esse subespaço e verifique se T é sobrejetora. Justifique suas respostas.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x, y) = (x + y, x, 2y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x - 2y, x + y)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$.

(f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x - 3y, x - z, z - x)$.

(g) $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3, \quad T(a_0 + a_1 x) = (a_1, 2a_1, a_1 - a_0)$.

(h) $T : M(2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$.

   (a) Determine $N(T)$ e $Im(T)$.

   (b) T é injetora? T é sobrejetora?

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0,0) = (1,-2,1)$, $T(0,1,0,0) = (-1,0,-1)$, $T(0,0,1,0) = (0,-1,2)$ e $T(0,0,0,1) = (1,-3,1)$.

   (a) Determine $N(T)$ e $Im(T)$.

   (b) Determine bases para $N(T)$ e $Im(T)$.

   (c) Verifique a validade do Teorema do Núcleo e da Imagem para esse caso específico.

9. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = [(1,0,-1)]$.

10. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é o subespaço gerado pelos vetores $(1,2,-1)$ e $(1,-1,0)$.

11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem é o subespaço gerado pelos vetores $(1,3,-1,2)$ e $(2,0,1,-1)$.

Gabarito Parcial

1 $T_A(x,y) = (0, x+y, 0)$, $\quad T_D(x,y,z) = (y+2z, -3z, 0, x-y, y+z)$.

2 (a) $\{(1,1,0)\}$

(b) $\dim Im(T) = 2$

4 (b) $Im(D_1) = \mathcal{P}_2$ e $N(D_1) =$ polinômios constantes.

6 (a) $N(T) = [(1,3)]$ e $\dim N(T) = 1$. Tem-se que T não é injetora, pois $N(T) \neq \{(0,0)\}$.

(c) $N(T) = \{(0,0)\}$ e $\dim N(T) = 0$. Tem-se que T é injetora pois $N(T) = \{(0,0)\}$.

(g) $N(T) = \{0\}$ e, consequentemente, T é injetora.

(h) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Tem-se que $\dim N(T) = 2$ e $\dim Im(T) = 2$.

9 $T(x,y,z) = (x+z, y)$.