

MTM510058 - Análise Funcional Aplicada Primeira Lista

1. Seja X um e.v.n. e Y um subespaço de X cujo interior é não-vazio. Mostre que $Y = X$.
2. Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto Y de X é *afim* se existe um subespaço vetorial Y_0 de X e $a_0 \in X$ tal que $Y = Y_0 + a_0$. Mostre que Y é afim se e somente se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in Y$, para todo $x, y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Seja X um e.v.n., $A, B \subset X$ e $A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Mostre que:
 - (a) Se A é aberto, então $A - B$ é aberto.
 - (b) Se A é fechado e B é compacto, então $A - B$ é fechado.
4. Seja X um espaço de Banach e M, N subespaços de X tais que $M \cap N = \{0\}$. Mostre que se M é fechado e N tem dimensão finita, então $M + N$ é fechado.

5. Considere $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$ e

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad (f \in C[0, 1]).$$

Mostre que $C[0, 1]$, munido com $\|\cdot\|_1$, é um espaço vetorial normado que não é Banach.

6. Considere $C[0, 1]$ e $\|\cdot\|_1$ como no exercício anterior e $t_0 \in [0, 1]$. Defina

$$\delta_{t_0} : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta_{t_0}(f) = f(t_0).$$

Mostre que δ_{t_0} é um funcional linear em $C[0, 1]$ que não é limitado.

7. Uma *Base de Hamel* de um espaço vetorial X é um subconjunto \mathcal{B} de X linearmente independente tal que o espaço gerado por \mathcal{B} é X . Mostre que todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ admite uma base de Hamel. Dica: Use o Lemma de Zorn.
8. Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Seja $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear tal que

$$f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y.$$

Sem usar o Lemma de Zorn, mostre que existe um funcional linear $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(y) = f(y), \quad \forall y \in Y \quad \text{e} \quad \tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

9. Seja X um e.v.n. e sejam $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ funcionais lineares em X . Mostre que são equivalentes:

(a) Existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que

$$f_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$$

(b) Existe $c > 0$ tal que

$$|f_0(x)| \leq c \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(x)|, \quad \forall x \in X$$

(c) $\bigcap_{j=1}^n N(f_j) \subset N(f_0)$,

onde $N(f_i)$ denote o núcleo de f_i ($0 \leq i \leq n$).

10. Seja X um e.v.n. munido com uma norma $\|\cdot\|$. Mostre que a topologia de X gerada por $\|\cdot\|$ é a menor topologia linear que faz $\|\cdot\|$ contínua em X .
11. Seja X um e.v.n. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de X diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Mostre que X é Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em X é convergente.
12. Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$ um subespaço fechado e considere a relação $R = \{(x, y) \in X \times X \mid x - y \in M\}$. Mostre que R é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva). Defina $X/M = \{[x] \mid x \in X\}$, onde $[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$. Mostre que X/M é um espaço vetorial quando munido com as operações $[x] + [z] = [x + z]$ e $\lambda[x] = [\lambda x]$. Mostre ainda que X/M é Banach se munido com a norma $\|[x]\| = \inf_{y \in [x]} \|y\|$.
13. Mostre que quaisquer duas normas em \mathbb{R}^n são equivalentes.
Dica: Mostre que qualquer norma em \mathbb{R}^n é equivalente a norma $\|\cdot\|_{\infty}$.
14. Seja X um espaço vetorial normado. Duas normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ são equivalentes quando existem constantes $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Mostre que

$$\|x\|_{\infty} = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

definem normas em \mathbb{R}^n e que

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, as normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_{\infty}$ são equivalentes.

15. Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, onde X é um espaço vetorial normado e Y é um espaço de Banach. Mostre que T admite uma única extensão $\tilde{T} \in \mathcal{B}(\widehat{X}, Y)$, onde \widehat{X} é o completamento de X .
16. Sejam X, Y e.v.n. Mostre que $\mathcal{B}(X, Y)$ é um espaço de Banach se e somente se Y é um espaço de Banach. Conclua, em particular, que X^* é Banach.