

## MTM510058 - Análise Funcional Aplicada Segunda Lista

1. Seja  $X$  um e.v.n. e  $C$  um subconjunto convexo de  $X$  tal que  $0 \in \text{int} C$ . Mostre que se  $C$  é aberto, então

$$C = \{x \in X \mid \rho_C(x) < 1\},$$

onde  $\rho_C$  denota o Funcional de Minkowski de  $C$ .

2. Seja  $X$  um e.v.n. real e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $f \neq 0$ . Mostre que se  $A \subset X$  é aberto, então  $f(A)$  é aberto.

3. Seja  $X$  um e.v.n. real e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $f \neq 0$ . Sejam  $A, B \subset X$  abertos tais que  $f(a) \leq f(b)$  para todo  $a \in A$  e  $b \in B$ . Mostre que  $f(a) < f(b)$  para todo  $a \in A$  e  $b \in B$ .

4. Seja  $X$  um e.v.n. e  $Y$  um subespaço vetorial de  $X$ . Mostre que são equivalentes:

- (a)  $Y$  é denso em  $X$ .
- (b) Se  $f \in X^*$  e  $f|_Y = 0$ , então  $f = 0$ .

5. Seja  $\mathcal{P}$  o espaço vetorial dos polinômios em uma variável com coeficientes reais. Denote por  $\mathcal{P}_+$  e  $\mathcal{P}_-$  o conjunto dos polinômios com coeficiente de mais alto grau positivo e negativo, respectivamente. Mostre que estes conjuntos são convexos e que não podem ser separados por um hiperplano.