

MTM510058 - Análise Funcional Aplicada

Sexta Lista

1. Mostre as seguintes generalizações da Desigualdade de Hölder ($1 \leq p, q, s \leq \infty$):

$$\|uv\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}.$$

$$\|uvw\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q \|w\|_r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}.$$

2. Construa um isomorfismo isométrico $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_1^*$. É possível construir um isomorfismo isométrico de ℓ_1 em ℓ_∞^* ?

3. Mostre que ℓ_1 e ℓ_∞ não são reflexivos.

4. Sejam c_0 e c os espaços das seqüências que convergem para zero e convergentes, respectivamente (ambos munidos com a norma infinito). Mostre que

(a) Para todo $1 \leq p < \infty$,

$$\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty.$$

(b) c_0 e c são subespaços fechados de ℓ_∞ .

(c) Existe um isomorfismo isométrico de ℓ_1 em c_0^* .

(d) c_0 e c não são reflexivos.

(e) c_0 e c são separáveis.

5. Considere o espaço ℓ_p , para $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $n \geq 1$, seja e_n o elemento de ℓ_p cuja n -ésima coordenada é igual a um e as demais são iguais a zero. Mostre que

(a) Se $p < \infty$, então (e_n) é uma seqüência fracamente mas não fortemente convergente em ℓ_p .

(b) $\{e_n\}$ é um subconjunto fechado mas não compacto de ℓ_p .

6. Seja $S = \{(x_n)_{n \geq 1} \mid n^p x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall p \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $S \subset \ell^p, \forall p \in \mathbb{N}$.

7. Seja $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ o conjugado de p . Mostre que

$$\|x\|_p = \max_{\|y\|_q=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right|,$$

onde $x = (x_n) \in \ell_p$ e $y = (y_n) \in \ell_q$.