MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Lista Avaliativa. Entrega: 28/06/2024

1. Seja X um espaço vetorial normado. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de X diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Mostre que X é Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em X é convertente.

2. Seja X um e.v.n. e Y um subespaço vetorial de X. Mostre que são equivalentes:
   (a) Y é denso em X.
   (b) Se $f \in X^*$ e $f\,|_Y = 0$, então $f = 0$.

3. Seja X um espaço vetorial normado, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequencia em X e $x \in X$ tais que $x_n \rightharpoonup x$. Mostre que $\sigma_n \rightharpoonup x$, onde
$$\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,, \qquad n \geq 1.$$

4. Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios em uma variável com coeficientes reais. Denote por $\mathcal{P}_+$ e $\mathcal{P}_-$ o conjunto dos polinômios com coeficiente de mais alto grau positivo e negativo, respectivamente. Mostre que estes conjuntos são convexos e que não podem ser separados por um hiperplano.

5. Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Mostre que
   (a) Se $T \in B(X,Y)$, então $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é continua.
   (b) Se X é reflexivo e $T \in B(X^*, Y)$, então $T : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é continua.
   (c) Se $T \in B(X, Y^*)$, então $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ é continua.

6. Seja $X = \ell_\infty$ (munido com a norma infinito). Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\pi_n : X \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_n(x) = x_n$, onde $x = (x_n)$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \in B_{X^*}$, mas que a sequência (π_n) não tem subsequência convergente na topologia fraca* de X^*. Isso representa alguma contradição ao Teorema de Banach-Alaoglu?

7. Seja X um e.v.n. e $S \subset X$. Mostre que S é limitado se e somente se $f(S)$ é limitado para todo $f \in X^*$.

8. Mostre que um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$.

9. Mostre que todo subconjunto de um espaço métrico separável é também separável (como espaço métrico).

10. Seja $S = \{(x_n)_{n\geq 1} \mid n^p\, x_n \to 0,\ n \to \infty,\ \forall p \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $S \subset \ell^p,\ \forall p \in \mathbb{N}$.

11. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ o seu dual, munido com a norma dual $\|\cdot\|_*$. Exiba um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ em $\mathcal{H}^*$ tal que $\|\cdot\|_* = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_*}$. Conclua que $\mathcal{H}^*$ é um espaço de Hilbert.

12. Seja $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert e $(\cdot,\cdot)$ um produto interno em $\mathcal{H}$ tal que

$$(x,x) \leq C\langle x,x\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{1}$$

onde $C > 0$. Mostre que existe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$(x,y) = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x,y \in \mathcal{H}.$$

13. Seja X um espaço (real) com produto interno e X^* o seu dual. Defina $T : X \to X^*$ por $T(z) = f_z$ onde $f_z : X \to \mathbb{R}$ é definida por $f_z(x) = \langle x, z\rangle$. Mostre que se T for sobrejetora, então X é um espaço de Hilbert.

14. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e A, B operadores lineares definidos em $\mathcal{H}$ tais que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Mostre que $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B = A^*$.

15. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\langle Ax, x\rangle \geq c\|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

onde $c > 0$. Mostre que A é isomorfismo.

16. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $U \in B(\mathcal{H})$ um *operador unitário*. Mostre que

$$\lambda \in \sigma(U) \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

17. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $A \in B(\mathcal{H})$ um *operador normal*, isto é, A é tal que $A^*A = AA^*$. Mostre que $r_\sigma(A) = \|A\|$ e que $\sigma_r(A) = \emptyset$.

18. Seja $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{n}, \ldots\right).$$

Mostre que T é compacto e $\sigma_p(T) = \{0\}$. Conclua que $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$.

19. Seja $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

Mostre que T é compacto e $\sigma_p(T) = \emptyset$. Conclua que $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

20. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Seja $T \in B(\mathcal{H})$ um operador compacto com imagem fechada, isto é, suponha que $R(T)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Mostre que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.