MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Primeira Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1. (2.0 Pontos) Seja X um espaço de Banach e S um subconjunto de X. Mostre que S é limitado se e somente se $f(S)$ é limitado para cada $f \in X^*$. Dica: use o Princípio da Limitação Uniforme.

2. (2.0 Pontos) Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita, $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ e $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. Prove que o fecho de S_X na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ é igual a B_X.

3. (2.0 Pontos) Seja X um espaço vetorial normado, $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequencia em X e $x \in X$ tais que $x_n \rightharpoonup x$. Mostre que $\sigma_n \rightharpoonup x$, onde
$$\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,, \qquad n \geq 1.$$

4. (2.0 Pontos) Mostre que se X é um espaço de Banach reflexivo, então o seu dual X^* é reflexivo.

5. (2.0 Pontos) Seja X um espaço de Banach. Para $M \subset X$ e $N \subset X^*$ subespaços vetoriais defina
$$M^0 = \{f \in X^* \mid \ f(x) = 0 \ \ \forall x \in M\}, \qquad N^+ = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \ \forall f \in N\}.$$
Mostre que
$$\left(M^0\right)^+ = \overline{M},$$
onde o fecho é tomado na topologia forte de X.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 17 de abril de 2024.