
MTM3112 - Álgebra Linear

Primeira Lista

1. Considere os vetores $u = (8, 6)$, $v = (4, -1)$ e $w = (1, -2)$ de \mathbb{R}^2 .

(a) Calcule o que se pede em cada item.

- | | | |
|----------------------|------------------|---------------------|
| (i) $u + v$ | (ii) $u - v$ | (iii) $-u$ |
| (iv) $-v$ | (v) $v - w$ | (vi) $2u$ |
| (vii) $\frac{1}{2}v$ | (viii) $4u - 3v$ | (ix) $2u - 3v + 4w$ |

(b) Tente interpretar geometricamente cada operação realizada no item (a).

2. Repita o item (a) do Exercício 1 para os vetores $u = (-1, 0, 2)$, $v = (0, 1, -3)$ e $w = (1, 0, -5)$ de \mathbb{R}^3 .

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Calcule o que se pede em cada item.

- | | | |
|----------------------|------------------|---------------------|
| (i) $A + B$ | (ii) $A - B$ | (iii) $-A$ |
| (iv) $-B$ | (v) $B - C$ | (vi) $2A$ |
| (vii) $\frac{1}{2}B$ | (viii) $4A - 3B$ | (ix) $2A - 3B + 4C$ |

4. Em qual espaço vetorial pertencem os *vetores* A , B e C do Exercício 3?

5. Considere os polinômios $p = 2x^3 - x^2 + 1$, $q = x^4 - x$ e $r = x^3 - 8$. Calcule o que se pede em cada item.

- | | | |
|----------------------|------------------|---------------------|
| (i) $p + q$ | (ii) $p - q$ | (iii) $-p$ |
| (iv) $-q$ | (v) $q - r$ | (vi) $2p$ |
| (vii) $\frac{1}{2}p$ | (viii) $4p - 3q$ | (ix) $2p - 3q + 4r$ |

6. Em qual espaço vetorial pertencem os *vetores* p , q e r do Exercício 5?

7. Considere as funções $f(x) = e^x - \sen x$, $g(x) = x^2 + 3\sen x$ e $h(x) = \ln x - x^2$. Calcule o que se pede em cada item.

- | | | |
|----------------------|------------------|---------------------|
| (i) $f + g$ | (ii) $f - g$ | (iii) $-f$ |
| (iv) $-g$ | (v) $g - h$ | (vi) $2f$ |
| (vii) $\frac{1}{2}f$ | (viii) $4g - 3h$ | (ix) $2f - 3g + 4h$ |

8. Em qual espaço vetorial pertencem os *vetores* f , g e h do Exercício 7?

9. Determine o *vetor nulo* dos espaços vetoriais abaixo.

- (a) \mathbb{R}^n (b) \mathcal{P}_7 (c) $\mathcal{M}(4, 5)$ (d) $C[0, 1]$

10. Determine o *vetor oposto* de cada vetor abaixo.

- (a) $u = (1, -3, 0, 0, \frac{1}{2}, \pi, -10)$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$
- (c) $p(x) = -1 + x^4 - x^2 + x$ (d) $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen} x + \ln x$

11. Para cada um dos vetores u , A , p e f do Exercício 10, determine um espaço vetorial que o contenha.

12. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de \mathbb{R}^2 . Justifique as suas respostas.

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ (b) $B = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$
- (c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -3y\}$ (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$
- (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$
- (g) $G = \{(0, 0)\}$ (h) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 1\}$

13. Faça um esboço geométrico de cada um dos subconjuntos do Exercício 12, identificando aqueles que são subespaços vetoriais.

14. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de \mathbb{R}^3 . Justifique as suas respostas.

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4y \text{ e } z = 0\}$ (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x - y\}$
- (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2\}$ (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$
- (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ (f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$

15. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de \mathbb{R}^n . Justifique as suas respostas.

- (a) $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 = 0\}$
- (b) $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1 + x_{n-1}\}$
- (c) $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$
- (d) $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n\}$

16. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $\mathcal{M}(2, 2)$. Justifique as suas respostas.

- (a) $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2, 2) \mid c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$

$$(b) B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \mid c = 0 \right\}$$

$$(c) C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \mid b = c \right\}$$

$$(d) D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \mid b = 1 \right\}$$

17. Para cada um dos conjuntos A , B , C e D do Exercício 16, encontre dois elementos pertencendo a cada um deles.

18. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $\mathcal{M}(3,3)$. Justifique as suas respostas.

(a) Matrizes diagonais 3×3

(b) Matrizes triangulares inferiores 3×3

(c) Matrizes triangulares superiores 3×3

(d) Matrizes triangulares 3×3

19. Seja

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a + 2b \\ 0 & a - b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) W é *subespaço vetorial* de $\mathcal{M}(2,2)$?

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

20. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $C[-1,1]$. Justifique as suas respostas.

(a) Funções f em $C[-1,1]$ tais que $f(-1) = f(1)$.

(b) Funções f em $C[-1,1]$ tais que $f(-1) = 0$ ou $f(1) = 0$.

Gabarito Parcial

- 1 (a) (i) (12, 5)
(iv) (-4, 1)
(v) (3, 1)
(vii) $(2, -\frac{1}{2})$
(viii) (20, 27)

- 3 (i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
(iv) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
(vii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(viii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

- 5 (i) $x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$
(iv) $-x^4 + x$
(v) $x^4 - x^3 - x + 8$
(vii) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
(viii) $-3x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 3x + 4$

- 7 (i) $e^x + 2\text{sen}x + x^2$
(iv) $-x^2 - 3\text{sen}x$
(v) $2x^2 + 3\text{sen}x - \ln x$
(vii) $\frac{e^x}{2} - \frac{\text{sen}x}{2}$
(viii) $7x^2 + 12\text{sen}x - 3 \ln x$

- 9 (a) $(0, 0, \dots, 0)$
(d) 0

- 10 (a) $(-1, 3, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\pi, 10)$
(c) $1 - x^4 + x^2 - x$

- 12 (a) Sim
(b) Não
(e) Não
(f) Sim

- 14 (a) Sim
(c) Não
(d) Não
(e) Não

- 16 (a) Sim
(b) Sim
(c) Sim
(d) Não