MTM3112 - Álgebra Linear
Segunda Lista

1. Se possível, escreva o vetor $w = (3, 4)$ como combinação linear dos vetores

   (a) $u = (1, 3)$ e $v = (2, 6)$

   (b) $u = (1, 3)$ e $v = (2, 5)$

2. Sejam $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Escreva cada um dos vetores $u = (-8, 4, 1)$, $v = (0, 2, 3)$ e $w = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

3. Considere os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Escreva o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

   (b) Determine o valor de k para que o vetor $(-8, 14, k)$ seja combinação linear de u e v.

   (c) Determine uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja combinação linear de u e v.

4. Escreva o vetor $v = (-1, 4, -4, 6)$ de $\mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$, $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

5. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Sejam $u = x^2 - 2x + 1$, $v = x + 2$, $w = 2x^2 - x$ e $p = 5x^2 - 5x + 7$ vetores em $\mathcal{P}_2$.

   (a) Escreva o vetor p como combinação linear de u, v e w.

   (b) É possível escrever o vetor p como combinação linear de u e v? Justifique sua resposta.

6. Considere as matrizes 2×2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Escreva A como combinação linear de A_1, A_2 e A_3.

7. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $u = (1, -2)$ e $v = (-2, 4)$, isto é, determine o subespaço $[u, v]$. O que representa geometricamente esse subespaço?

8. Verifique que os vetores $u = (2, 1)$ e $v = (1, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, isto é, verifique que o espaço gerado $[u, v]$ por u e v é igual a $\mathbb{R}^2$.

9. Verifique que os vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (0, 0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, isto é, verifique que o espaço gerado $[u, v, w]$ por u, v e w é igual a $\mathbb{R}^3$.

10. Sejam $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, -1, 1)$ e $w = (1, 1, 1)$. É verdade que $[u, v, w] = \mathbb{R}^3$?

11. Considere o subespaço vetorial S de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, -2, 4)$, $v_2 = (1, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, 4, -4, 8)$, ou seja, $S = [v_1, v_2, v_3]$. Verifique se os vetores $u = (\frac{2}{3}, 1, -1, 2)$ e $v = (0, 0, 1, 1)$ pertencem a S.

12. Verifique que os polinômios $1 - x^2$, $x + 2$ e x^2 geram o espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau menor ou igual a dois.

13. Verifique que os polinômios $1 - x^3$, $(1 - x)^2$, $1 - x$ e 1 geram o espaço $\mathcal{P}_3$ dos polinômios de grau menor ou igual a três.

14. Encontre vetores geradores para cada um dos subespaços descritos abaixo.

    (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y \ \text{ e } \ z = -3y\}$

    (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 7x + 5y - 4z = 0\}$

    (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

    (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$

15. Seja S o subespaço vetorial de $\mathcal{M}(3, 2)$ gerado pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

A matriz

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

pertence a S?

Gabarito Parcial

1 (a) Não é possível
  (b) $w = -7u + 5v$

3 (b) $k = 12$
  (c) $c = 14a + 10b$

4 $v = -1v_1 + 3v_2 + 2v_3$

5 (a) $p = 3u + 2v + w$

7 $[u, v] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}$

10 Sim

14 (a) Uma possível resposta é $(-2, 1, -3)$
  (c) Uma possível resposta é $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$

11 $(0, 0, 1, 1)$ não pertence a S.

15 Não