
MTM3112 - Álgebra Linear
Sexta Lista

1. Utilizando a definição, em cada caso verifique diretamente se o vetor v é *autovetor* da matriz A , isto é, verifique se $Av = \lambda v$ para algum (autovalor) λ .

(a) $v = (-2, 1)$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $v = (1, 1, 2)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $v = (-2, 1, 3)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada item, encontre os *autovalores* e *autovetores* da matriz A .

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. Fatore as matrizes abaixo como $A = X\Lambda X^{-1}$, onde X é não-singular e Λ é diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Para cada uma das matrizes do Exercício 3, use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$ para calcular A^6 .
5. Encontre uma matriz 2×2 com autovalores 1 e 4 e autovetores $(3, 1)$ e $(2, 1)$, respectivamente. Dica: use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$.
6. Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalores iguais a 1 ou -1. Mostre que A é não-singular e que $A^{-1} = A$. Dica: use a fatoração $A = X\Lambda X^{-1}$ para concluir que $A^2 = I$.
7. Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes abaixo, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gabarito Parcial

- (1) (a) Sim
(b) Sim
(c) Não
- (2) (a) $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1, 1)$ e $v = x(5, 2)$, respectivamente.
(b) $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1, 0)$ e $v = x(0, 1)$, respectivamente.
(c) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = x(1, -1)$ e $v = x(1, 1)$, respectivamente.
(d) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$ e $v = x(1, 0, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1)$, respectivamente.

(3) Possíveis repostas:

(a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) Os autovalores são $\lambda = -3$, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 5$

(5) $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

(8) Possíveis respostas:

(a) $B = A$

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$