
MTM3112 - Álgebra Linear

Sétima Lista

1. Fatore cada uma das matrizes abaixo como $A = X\Lambda X^T$, onde X é uma *matriz ortogonal* e Λ é uma *matrix diagonal*.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2. Toda matriz A de ordem $m \times n$ determina uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $T_A(v) = Av$. Para cada matriz abaixo, encontre sua respectiva transformação linear.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $T : V \rightarrow W$ uma função. Mostre que

- (a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$.
(b) Se $T(0) \neq 0$, então T não é uma transformação linear.

4. Determine quais das aplicações abaixo são transformações lineares. Justifique a sua resposta.

- (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (x + y, x - y)$.
(b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T_2(x, y) = xy$.
(c) $T_3 : M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $T_3 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
(d) $T_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T_4(x) = |x|$.

5. (a) Ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
(b) Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.
6. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$? Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.
7. Qual é a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$ e $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?
8. Determine a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

Gabarito Parcial

(1) Possíveis respostas:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$(2) T_A(x, y) = (0, x + y, 0), \quad T_D(x, y, z) = (y + 2z, -3z, 0, x - y, y + z).$$

(4) (a) Sim

(b) Não

(c) Não

(d) Não

$$(5) (a) T(x, y, z) = (2x + y, y - z)$$

$$(8) T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + (a_0 + a_2)x + (2a_2 - a_1)x^2$$