MTM3422 - Álgebra Linear II
Primeira Lista

1. Em cada item, determine o produto escalar $u \cdot v$ dos vetores u e v.

   (a) $u = (-3, 4)$ e $v = (5, -2)$

   (b) $u = (6, -1)$ e $v = (1/2, -4)$

   (c) $u = (2, 3)$ e $v = (0, 0)$

   (d) $u = (1, -2, -3)$ e $v = (0, 1, 0)$

   (e) $u = (3, 2, -1)$ e $v = (1, 0, 6)$

   (f) $u = (1, 0, 2, 1, 8, 5/4)$ e $v = (0, 1, -1, 5, 0, 4/5)$

2. Determine um vetor $u = (x, y, z)$ satisfazendo $u \cdot v_1 = 4$, $u \cdot v_2 = 6$ e $u \cdot v_3 = 2$, onde $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (3, -1, -1)$ e $v_3 = (2, -2, 0)$.

3. Em cada item, verifique se os vetores u e v são *ortogonais* (recorde que u e v são ditos ortogonais quando $u \cdot v = 0$). Nos quatro primeiros itens, faça um esboço geométrico no plano dos vetores u e v.

   (a) $u = (2, 3)$ e $v = (-3, 2)$

   (b) $u = (5, -1)$ e $v = (0, 0)$

   (c) $u = (3, 1)$ e $v = (1, -1)$

   (d) $u = (4, 3)$ e $v = (1, -4/3)$

   (e) $u = (2, -1, 0)$ e $v = (0, 0, 7)$

   (f) $u = (2, -1, 4)$ e $v = (0, -2, 1/2)$

   (g) $u = (0, 1, 2, -5)$ e $v = (1, 0, 5, 2)$

   (h) $u = (1, 0, 2, 1, 8, 5/4)$ e $v = (0, 1, -1, 5, 0, -12/5)$

4. Determine um vetor de $\mathbb{R}^3$ que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, 1, 2)$, $v = (5, 1, 3)$ e $w = (2, -2, -3)$.

5. Em cada caso, determine um valor de m para que os vetores sejam ortogonais.

   (a) $u = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4, 1, 5)$

   (b) $u = (0, m - 1, 4)$ e $v = (5, m - 1, -1)$

6. Determine a *norma* de cada um dos vetores u e v do Exercício 1. Considere a norma de um vetor $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

7. Determine um valor de c para que $\|v\| = 7$, onde $v = (6, -3, c)$.

8. Verifique quais dos seguintes vetores são *unitários*.
   $v_1 = (0, 1/8, 5/8, 3/8, -4/8, 3/8, -1/8, 0, 1/8, -1/8, 1/8)$,
   $v_2 = (1, 1, 1)$,
   $v_3 = (2/3, -2/3, 1/3)$.

9. Use as propriedades da norma para verificar que se u é um vetor não-nulo, então o vetor $\dfrac{u}{\|u\|}$ é unitário. Escreva os vetores unitários do Execício 8 nesse formato.

10. Verifique que cada conjunto A, B e C abaixo forma um *conjunto ortogonal* de vetores.

    (a) $A = \{(1,2,-3),(3,0,1),(1,-5,-3)\}$
    (b) $B = \{(\sqrt{3},1),(-1,\sqrt{3})\}$
    (c) $C = \{(-2,1,1),(0,-1,1),(1,1,1)\}$

11. Obtenha um *conjunto ortonormal* de vetores a partir de cada um dos conjuntos A, B e C do Exercício 10. Dica: use o Exercício 9.

12. Em cada um dos casos abaixo, determine se os vetores u, v e w formam um conjunto *ortogonal*, *ortonormal* ou nenhum dos dois.

    (a) $u = (1,2,1)$, $v = (1,-1,1)$ e $w = (-1,1,2)$
    (b) $u = (a,b,c)$, $v = (-b,a,0)$ e $w = (-ac,-bc,a^2+b^2)$
    (c) $u = (2/7,6/7,3/7)$, $v = (3/7,2/7,-6/7)$ e $w = (6/7,-3/7,2/7)$

13. Determine a, b e c para que o conjunto $\beta = \{(1,-3,2),(2,2,2),(a,b,c)\}$ seja uma *base ortogonal* de $\mathbb{R}^3$. A partir de β, construa uma base *ortonormal*.

14. Considere a base ortonormal de $\mathbb{R}^5$

    $$\alpha = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0,0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right),\Big(0,0,0,1,0\Big),\Big(0,0,0,0,1\Big)\right\}$$

    Faça o que se pede:

    (a) Verifique que os vetores da base α são mutuamente ortogonais e unitários.
    (b) Encontre as *coordenadas* do vetor $v = (100,\pi,\sqrt{2},-1,0)$ na base α. Dica: use o fato que se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é uma base ortonormal, então as coordenadas de um vetor v são dadas por $v\cdot v_1, v\cdot v_2,\ldots,v\cdot v_n$, ou seja, pelos Coeficientes de Fourier de v.

15. Verifique a validade da Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|u\cdot v| \leq \|u\|\|v\|$ para os vetores u e v em cada item do Exercício 1.

16. Em cada caso, determine o *ângulo* entre os vetores u e v. Recorde que o ângulo θ entre u e v é definido por $\theta = \arccos\dfrac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$.

    (a) $u = (2,1,3)$ e $v = (6,3,9)$
    (b) $u = (2,-3)$ e $v = (3,2)$
    (c) $u = (4,1)$ e $v = (3,2)$
    (d) $u = (-2,3,1)$ e $v = (1,2,4)$
    (e) $u = (1,1,1,1)$ e $v = (1,1,0,0)$

17. Para cada par de vetores u e v no Exercício 16, determine a *projeção ortogonal* de u em v. Recorde que a projeção ortogonal de u em v é definida por $\operatorname{proj}_v(u) = \dfrac{u\cdot v}{\|v\|^2}v$. Em cada caso, verifique também que os vetores $u - \operatorname{proj}_v(u)$ e v são *ortogonais*, isto é, verifique que $(u - \operatorname{proj}_v(u))\cdot v = 0$.

18. Considere o produto interno

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$$

definido para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Recorde que, analogamente ao caso com produto escalar, define-se um *vetor unitário* como um vetor u tal que $\|u\| = 1$, onde $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Além disso, dois vetores u e v são ditos *ortogonais* quando $\langle u, v \rangle = 0$. Uma base diz-se uma *base ortonormal* quando seus elementos são mutuamente (dois-a-dois) ortogonais e unitários (segundo as definições acima).

Mostre que relativamente ao produto interno acima, o conjunto $\alpha = \{(1, 0), (2, -1)\}$ é *base ortonormal* de $\mathbb{R}^2$. O conjunto α é uma base ortonormal em relação ao produto escalar $u \cdot v$?

19. Determine o valor de k para que o conjunto $\beta = \{(2, -1), (k, 1)\}$ seja uma *base ortogonal* de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Determine também uma *base ortonormal* a partir da base β.

20. Considere o produto interno

$$\langle p, q \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

para polinômios $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$ de grau menor ou igual a dois e a norma $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ (definida para qualquer polinômio p de grau menor ou igual a 2). Para $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcule:

   (a) $\langle p_1, p_2 \rangle$
   (b) $\|p_1\|$ e $\|p_3\|$
   (c) $\|p_1 + p_2\|$
   (d) $\dfrac{p_2}{\|p_2\|}$
   (e) O ângulo θ entre p_1 e p_3. Recorde que, analogamente ao caso do produto escalar, nesse caso $\theta = \arccos \dfrac{\langle p_1, p_3 \rangle}{\|p_1\| \|p_3\|}$.

21. Considere o produto interno

$$\langle p, q \rangle = 2ac + ad + bc + 2bd$$

definido para polinômios $p = ax + b$ e $q = cx + d$ de grau menor ou igual a um. Defina também a norma $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ (para qualquer polinômio p de grau menour ou igual a um).

   (a) Calcule o ângulo θ entre os polinômios $p = x - 1$ e $q = 3x$. Recorde que, analogamente ao caso do produto escalar, nesse caso $\theta = \arccos \dfrac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|}$.
   (b) Encontre um polinômio r que seja ortogonal ao polinômio $p = x - 1$, isto é, tal que $\langle p, r \rangle = 0$.

22. Considere o produto interno

$$\langle A, B\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

para matrizes 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

e a norma $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$ (definida para qualquer matriz A de ordem 2×2). Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine:

(a) $\|A\|$

(b) $\|B\|$

(c) $\|A + B\|$

(d) O ângulo θ entre A e B. Recorde que, analogamente ao caso do produto escalar, nesse caso $\theta = \arccos \dfrac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\|B\|}$.

23. Considerando o produto interno definido no Exercício 22, determine um valor de x de modo que $\langle A, B\rangle = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

24. Considere o seguinte produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

definido para funções contínuas f e g no intervalo $[0, 1]$, e defina $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$, $\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle}$. Calcule $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$ e $\|g\|$ para $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x + 3$.

25. Em cada item, mostre que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é produto interno em $\mathbb{R}^2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

(a) $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

(b) $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$

26. Mostre que

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

define um produto interno no espaço de funções contínuas $C[0, 1]$.

27. Mostre que

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh$$

define produto interno no espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2.

28. Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real simétrica e positiva definida, isto é, $Q^\top = Q$ e $Qx \cdot x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Mostre que $\langle x, y \rangle = Qx \cdot y$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

29. Seja X um espaço com produto interno. Mostre que

    (a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$,

    (b) $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u - v\|$,

    para todo $u, v \in X$.

30. Seja X um espaço com produto interno. Para quaisquer $u, v \in X$, mostre que os vetores $\|u\|v + \|v\|u$ e $\|u\|v - \|v\|u$ são ortogonais.

Gabarito Parcial

1 (a) -23
   (b) 7
   (c) 0
   (d) -2
   (e) -3
   (f) 4

2 $u = (3, 2, 1)$

3 (a) Sim
   (b) Sim
   (c) Não
   (d) Sim
   (e) Sim
   (f) Não
   (g) Sim
   (h) Sim

4 Qualquer múltiplo de $(1, 7, -4)$

5 (a) $\frac{2}{17}$
   (b) 3 ou -1

7 $c = 2$ ou $c = -2$

12 (a) Nenhum dos dois
   (b) Ortogonal
   (c) Ortonormal

13 $(a, b, c) = t(-5, 1, 4)$ para $t \neq 0$.

14 As coordenadas são $\frac{100+\pi}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}+\pi-100}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}+100-\pi}{\sqrt{3}}, -1, 0$.

16 (a) $\theta = 0$
   (b) $\theta = \frac{\pi}{2}$
   (c) $\theta = \arccos \frac{14}{\sqrt{221}}$
   (d) $\theta = \arccos \frac{4\sqrt{6}}{21}$
   (e) $\theta = \frac{\pi}{4}$

19 $k = -\frac{1}{3}$

20 (a) -18

(b) $\sqrt{14}$ e $\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{3}$

(d) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

(e) $\theta = \arccos \frac{\sqrt{7}}{7}$

21 (a) $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

(b) $r = x + 1$

22 (c) $\sqrt{21}$

(d) $\theta = \arc\cos \frac{4}{\sqrt{42}}$

23 $x = 4$

24 $-\frac{29}{12}$ e $\sqrt{\frac{8}{15}}$