MTM3422 - Álgebra Linear II
Segunda Lista

1. Seja M um conjunto não-vazio. Uma *métrica* em M é uma aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

   (i) $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$,

   (ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

   (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

   para todo $x, y, z \in M$. Num espaço real X com produto interno, mostre que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma métrica em X.

2. Seja X um espaço real com produto interno. Mostre a Identidade de Polarização

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right), \qquad \forall u, v \in X.$$

3. Seja X um espaço real com produt interno $\langle\ ,\ \rangle$ e $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ a norma induzida por $\langle\ ,\ \rangle$. Seja $(\ ,\ )$ um produto interno em X tal que $(u, u) = \langle u, u\rangle$ para todo $u \in X$. Mostre que $(u, v) = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in X$. Dica: use a Identidade de Polarização.

4. Seja X um espaço real com produto interno, sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vetores em X e defina $\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\|u_i - \overline{u}\|^2 + \|\overline{u}\|^2 \right).$$

5. Seja X um espaço real com produto interno e $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ um subconjunto ortonormal de X. Mostre que, para todo $u \in X$,

$$\|u\|^2 = \left\| u - \sum_{i=1}^{k} \langle u, v_i\rangle v_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^{k} |\langle u, v_i\rangle|^2.$$

   Conclua que vale a Desigualdade de Bessel:

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle u, v_i\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \qquad \forall u \in X.$$

6. Seja X um espaço real com produto interno e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de X. Sejam $u, v \in X$ e

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad [v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

as coordenadas de u e v na base β, respectivamente. Mostre que

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

7. Em cada item, aplique o *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt* para obter, a partir da base dada, uma *base ortonormal*.

   (a) $\alpha = \{(3,4),(1,2)\}$

   (b) $\beta = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,2)\}$

   (c) $\gamma = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,3,4)\}$

8. Determine uma *base ortonormal* para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

   (a) $U = \{(x,y,z) \mid y - 2z = 0\}$

   (b) $W = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}$

9. Determine uma *base ortonormal* para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u = (1,0,-1,1)$, $v = (0,1,0,1)$ e $w = (1,1,-1,-2)$.

10. Considere o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ e o *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt* em que o produto interno acima é utilizado no lugar do produto escalar. Aplique esse processo na base $\{1, x, x^2\}$ para obter a base ortonormal $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2-1)\right\}$. Verifique diretamente que o último conjunto é um conjunto ortonormal.

Gabarito Parcial

7 (a) $\{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})\}$

(b) $\{(1,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

(c) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0)\}$

8 (a) $\Big\{(1,0,0), (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\Big\}$

(b) $\Big\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})\Big\}$

9 Uma possível resposta é

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)\right\}$$